$\boxed{1}$

直方体 ABCD－EFGH において，次のものを求めなさい。

(1)　AB＝5 cm，BC＝5 cm，AE＝6 cm のとき，AG の長さ

(2)　BF＝4 cm，BC＝12 cm，AG＝13 cm のとき，AB の長さ

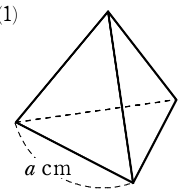
$\boxed{2}$

次の立体の体積を求めなさい。

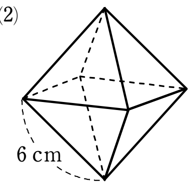
(1)　1 辺の長さが a cm の正四面体

(2)　1 辺の長さが 6 cm の正八面体

(1)



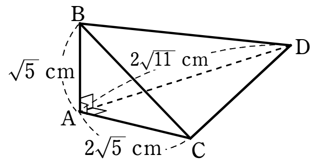
(2)



$\boxed{3}$

三角錐 ABCD において，AB＝$\sqrt{5}$ cm，AC＝$2\sqrt{5}$ cm，AD＝$2\sqrt{11}$ cm，∠BAC＝∠CAD＝∠DAB＝90° である。

このとき，頂点 A から △BCD に引いた垂線の長さを求めなさい。

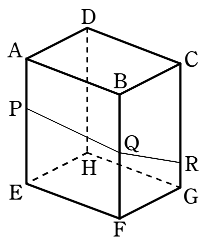


$\boxed{4}$

右の図のような直方体 ABCD-EFGH があり，

AE＝5 cm，AB＝4 cm，AD＝3 cm

である。また，P，R はそれぞれ辺 AE，CG 上の点で，AP＝2 cm，CR＝4 cm である。辺 BF 上に点 Q を，PQ＋QR が最小となるようにとるとき，PQ＋QR の長さを求めなさい。



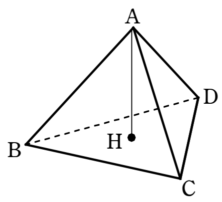
$\boxed{5}$

半径 3 cm の球を平面で切断したら，切り口の面積が 5π cm^2 となった。

このとき，球の中心から平面までの距離を求めなさい。

$\boxed{6}$

正三角錐 A－BCD において，底面 BCD は 1 辺の長さが 6 cm の正三角形であり，辺 AB，AC，AD の長さは 5 cm である。頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引くと，H は △BCD の重心となる。この正三角錐の体積を求めなさい。



$\boxed{7}$

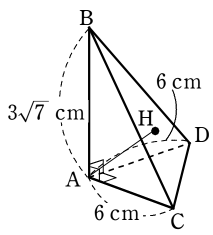
三角錐 ABCD において，AB＝$3\sqrt{7}$ cm，AC＝6 cm，AD＝6 cm，∠BAC＝∠CAD＝∠DAB＝90°

である。このとき，次のものを求めなさい。

(1)　三角錐 ABCD の体積 V

(2)　△BCD の面積

(3)　頂点 A から △BCD に引いた垂線 AH の長さ



$\boxed{8}$

次の問いに答えなさい。

(1)　底面の半径が 4 cm で，母線の長さが 6 cm である円錐の体積を求めなさい。

(2)　底面の半径が 8 cm で，高さが 6 cm である円錐の表面積を求めなさい。

1

解説

(1)　△ACG は直角三角形であるから

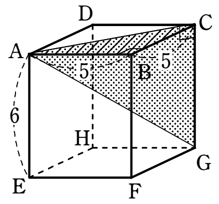
$AG^2=AC^2+CG^2=AC^2+6^2$　…… ①

△ABC も直角三角形であるから

$AC^2=AB^2+BC^2=5^2+5^2$　…… ②

①，② から　$AG^2=5^2+5^2+6^2=86$

$AG>0$ であるから　$AG=\sqrt{86}$ cm



(2)　△ABG は直角三角形であるから

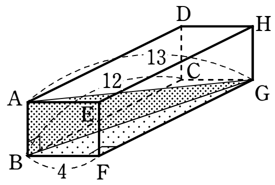
$AB^2=AG^2-BG^2=13^2-BG^2$　…… ③

△BFG も直角三角形であるから

$BG^2=BF^2+FG^2=4^2+12^2=160$　…… ④

③，④ から　$AB^2=13^2-160=9$

$AB>0$ であるから　$AB=3$ cm



2

解説

(1)　図のように，正四面体の頂点を A，B，C，D とする。

△BCD は 1 辺 a cm の正三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

$$DM=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

よって，△BCD の面積は　$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

頂点 A から底面 BCD に垂線 AH を引くと，H は △BCD の重心であるから

$$DH=\frac{2}{3}DM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

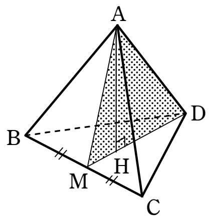
よって，直角三角形 AHD において

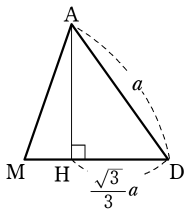
$$AH=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

したがって，正四面体の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\,(\text{cm}^3)$$





(2)　図のように，正八面体の頂点を A，B，C，D，E，F とする。

正四角錐 A－BCDE において，頂点 A から底面 BCDE に垂線 AH を引くと，H は線分 EC，BD の交点である。

よって，直角三角形 ABH において

$$AH^2=AB^2-BH^2$$

$$=6^2-BH^2\quad\cdots\cdots ①$$

ここで，直角三角形 BHC において，

BH : CH : BC＝1 : 1 : $\sqrt{2}$ であるから

$$BH=BC\times\frac{1}{\sqrt{2}}=6\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

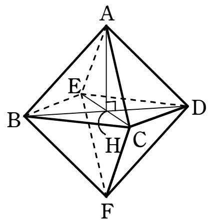
これと ① から　$AH^2=36-(3\sqrt{2})^2=18$

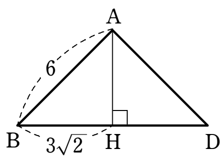
$AH>0$ であるから　$AH=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

よって，正四角錐 A－BCDE の体積は

$$\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}$$

したがって，正八面体の体積は　$2\times36\sqrt{2}=72\sqrt{2}$ (cm^3)





3

解説

三角錐 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times AB\times AC\right)\times AD=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\right)\times2\sqrt{11}$$

$$=\frac{10\sqrt{11}}{3}\quad\cdots\cdots ①$$

直角三角形 ABC，ACD，ADB において

$$BC=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$$

$$CD=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{11})^2}=8$$

$$BD=\sqrt{(2\sqrt{11})^2+(\sqrt{5})^2}=7$$

△BCD において，頂点 B から辺 CD に垂線 BE を引く。

CE＝x cm とおくと，直角三角形 BCE，BDE において

$$BE^2=BC^2-CE^2=5^2-x^2$$

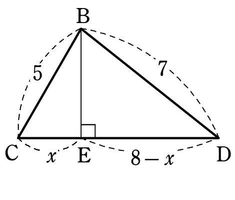
$$BE^2=BD^2-DE^2=7^2-(8-x)^2$$

よって　$5^2-x^2=7^2-(8-x)^2$

すなわち　$x=\frac{5}{2}$

したがって　$BE^2=5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$

$BE>0$ であるから　$BE=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$



よって，△BCD の面積は　$\frac{1}{2}\times8\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$　…… ②

頂点 A から △BCD に引いた垂線を AH とすると，三角錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH$$

①，② から　$\frac{10\sqrt{11}}{3}=\frac{1}{3}\times10\sqrt{3}\times AH$

よって　$AH=\frac{\sqrt{33}}{3}$　答　$\frac{\sqrt{33}}{3}$ cm

4

解説

右の図のような展開図の一部において，PQ＋QR の長さが最小となるのは，3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，すなわち線分 BF と PR の交点の位置に点 Q があるときである。

R から AE に垂線 RH を引くと

PH＝5－2－1＝2 (cm)

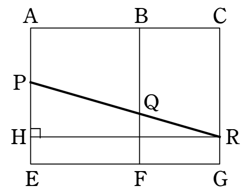
RH＝4＋3＝7 (cm)

よって，直角三角形 RPH において

$$RP=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}\ (\text{cm})$$

したがって，求める PQ＋QR の長さは

$\sqrt{53}$ cm



5

解説

切り口の図形は円になる。

球の中心を O とし，O から平面に垂線 OH を引くと，H は切り口の円の中心となる。

円の半径を r cm とすると，面積が 5π cm^2 で あるから　$\pi r^2=5\pi$

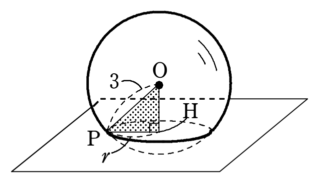
よって　$r^2=5$

ここで，円 H の円周上の 1 点を P とすると，直角三角形 OPH において

$$OH^2=3^2-r^2=3^2-5=4$$

$OH>0$ であるから　$OH=2$

したがって，球の中心から平面までの距離は　2 cm



6

解説

△BCD は 1 辺 6 cm の正三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

$$DM=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

よって，△BCD の面積は

$$\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

H は △BCD の重心であるから　$DH=\frac{2}{3}DM=2\sqrt{3}$

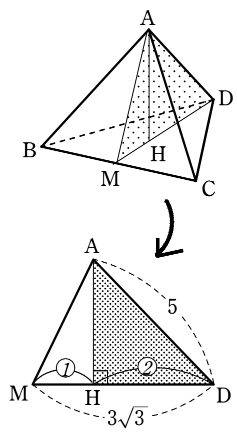
よって，直角三角形 AHD において

$$AH=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$$

したがって，正三角錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\sqrt{13}$$

$$=3\sqrt{39}\ (\text{cm}^3)$$　答



7

解説

(1)　$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times AC\times AD\right)\times AB=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times3\sqrt{7}$

$$=18\sqrt{7}\ (\text{cm}^3)$$　答

(2)　直角三角形 ABC，ACD，ADB において

$BC=\sqrt{(3\sqrt{7})^2+6^2}=3\sqrt{11}$，　$CD=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$BD=\sqrt{6^2+(3\sqrt{7})^2}=3\sqrt{11}$

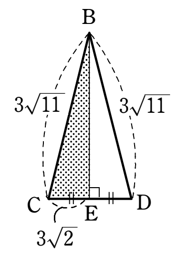
よって，△BCD は BC＝BD の二等辺三角形である。

頂点 B から辺 CD に垂線 BE を引く。

直角三角形 BCE において

$$BE=\sqrt{(3\sqrt{11})^2-(3\sqrt{2})^2}=9$$

よって，△BCD の面積は　$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times9=27\sqrt{2}$ (cm^2)　答



(3)　三角錐の体積 V は　$V=\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AH$

(1)，(2) から　$18\sqrt{7}=\frac{1}{3}\times27\sqrt{2}\times AH$

よって　$AH=\sqrt{14}$ cm　答

$\boxed{8}$

解説

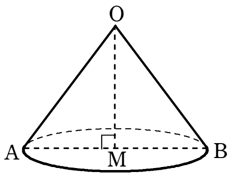
(1)　円錐の頂点を O とし，底面の直径の 1 つを AB とすると，O から底面に引いた垂線は，直径 AB の中点 M を通る。

このとき，△OAM において

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2}$$
$$=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$

よって，円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times2\sqrt{5}=\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$$



(2)　母線の長さは　$\sqrt{8^2+6^2}=10\,(\mathrm{cm})$

よって，展開図における側面の扇形の面積は，

$$\frac{1}{2}\times(\text{弧の長さ})\times(\text{半径})$$

から　$\frac{1}{2}\times16\pi\times10=80\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

また，底面積は　$\pi\times8^2=64\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

したがって，表面積は

$$80\pi+64\pi=144\pi\,(\mathrm{cm}^2)$$