1 [2019 慶応義塾大]

密度一定の球の外に置いた物体には，球の中心に全質量が集中しているとしたときの万有引力がはたらく。一方，図 1 のように密度一定の球の内部から同一中心の球をくり抜いて得られる厚みが一定の中空の球体を球殻とよぶ。球殻の場合，内部の任意の位置で球殻からの万有引力の合成が 0 となる。

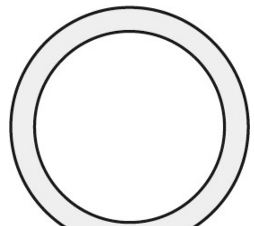


図 1

図 2 に示すように，半径 R の球 S の中心を貫く直線状のトンネル AB の上端 A で質量 m の小球をはなしたところ，下端 B に向かって初速 0 で落下し始め，時間 T_0 の後に初めて A にもどった。

次の問いにおいて，小球 m とトンネルとの間に摩擦はなく，またトンネルの直径は R に比べて十分に小さい。万有引力定数を G，球の密度を一定値 ρ，球 S は地球程度の大きさで静止していて動かない。

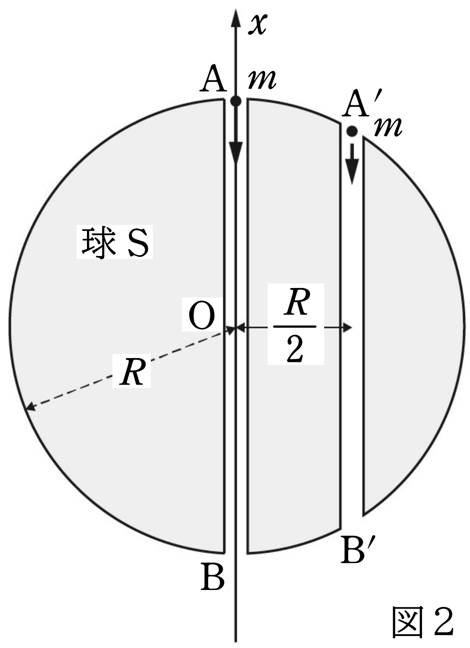


図 2

(1) (a) 球 S の中心 O を原点とし，O から A の向きを x 軸の正の向きとする。小球 m が x ($-R \leqq x \leqq R$) の位置にあるとき，小球 m が球 S から受ける万有引力を求めよ。

(b) T_0 を求めよ。

(c) トンネル AB と平行で，中心から距離 $\frac{R}{2}$ の位置にあるもう 1 つの細いトンネル A′B′ の上端 A′ から初速 0 で下端 B′ に向かって落下し始めた小球 m は，時間 T_1 の後初めて A′ にもどった。T_1 を求めよ。

(2) (a) 図 3 に示すように，小球 m と等しい質量 m の小さな物体 D を位置 A から球 S の接線方向に速さ v_0 で打ち出したところ，表面すれすれを球 S の万有引力を受けながら速さ v_0 で飛行を続けた。球 S の中心 O を通りトンネルと直交する直線が球の表面と交わる点を H とする。物体 D が H を通過した瞬間に小球 m を A から B に向け初速 v_1 で打ち出し，位置 B において物体 D に衝突させた。物体 D の円軌道半径は R に等しいとみなせる。

v_0，v_1 を ρ，G，R を使って表せ。

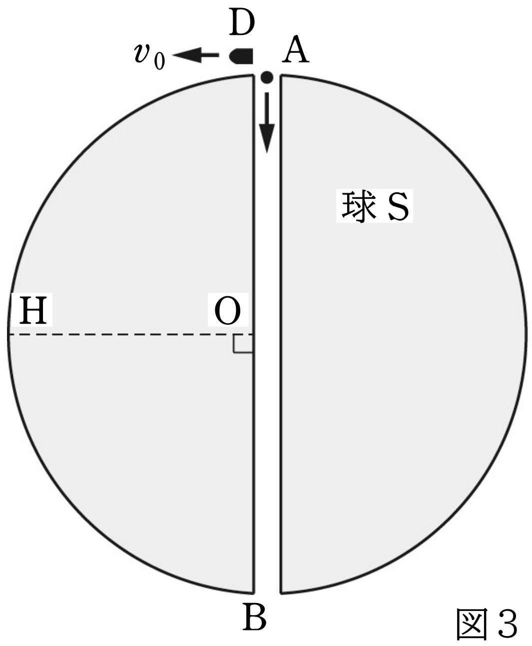


図 3

(b)　図 4 に示すように，物体 D がある位置を通過した瞬間に，位置 A′ から初速 $2v_0$ で小球 m を B′ に向かって打ち出したところ，位置 B′ で物体 D と小球 m が合体し，球 S に接触することなく B′ から飛び出した。合体した物体が到達する球 S の中心からの最大距離を求めよ。

(3)　$R=5.0\times10^{6}$ m，$\rho=5.4\times10^{3}$ kg/m^3，$G=6.7\times10^{-11}$ N･m^2/kg^2，円周率＝3.0 として，物体 D の速さ v_0，および物体 D が球 S を一周する時間を求めよ。

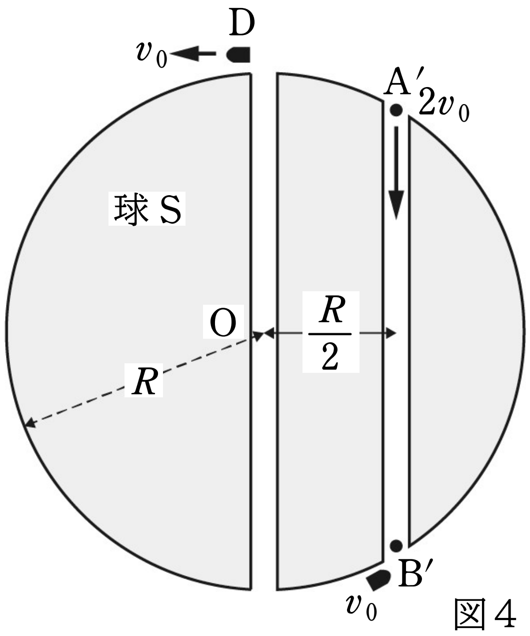


図 4

表題

$\boxed{1}$［2019 慶応義塾大］

解答　(1) (a)　$-\frac{4}{3}\pi G\rho mx$　　(b)　$\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$　　(c)　$\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$

(2) (a)　v_0：$2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}$，$v_1$：$2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}$　　(b)　$\frac{8}{5}R$

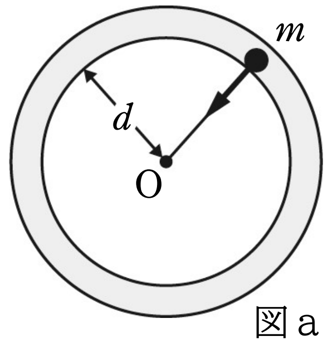
(3)　v_0：6.0×10^3 m/s，周期：5.0×10^3 s

表題

1 ［2019 慶応義塾大］

(解説)

(1)(a)　小球 m が球Sの中心Oから距離 d の位置にあるとき，小球より外側の球殻から小球が受ける万有引力の合力は0となるから，小球が受ける万有引力は，半径 d，密度 ρ の球の中心Oに質量 $\frac{4}{3}\pi d^3\rho$ が集中しているとして求めればよく，点Oの向きに大きさ

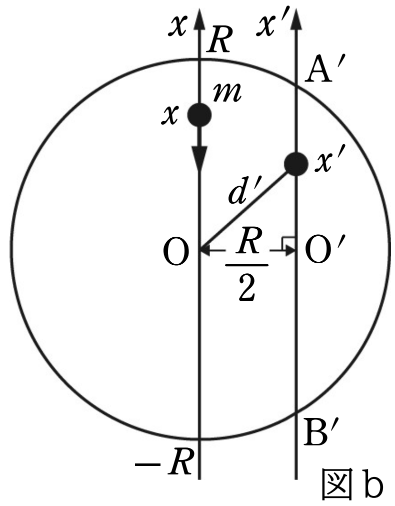


図a

$$G\frac{\frac{4}{3}\pi d^3\rho m}{d^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho md$$

である。

したがって，小球 m が x 軸上の位置 x にあるとき，小球 m が球Sから受ける万有引力は



図b

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho mx$$

(b)　小球 m の加速度を α とすれば運動方程式は

$$m\alpha=-\frac{4}{3}\pi G\rho mx$$

よって

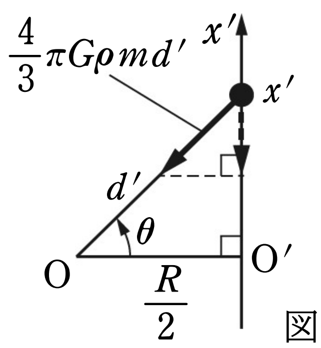
$$\alpha=-\frac{4}{3}\pi G\rho x$$

ゆえに，小球 m は $x=0$ を中心とし，角振動数 $\omega_0=2\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}$ の単振動をする。初速0なのでAは単振動の端であり，T_0 は単振動の周期であるから

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

(c)　図bのようにA′，B′の中点を原点O′とする x' 軸をとり，小球 m が位置 x' にあるときの球Sの中心Oとの距離を d' とすると，小球 m が受ける万有引力の大きさは $\frac{4}{3}\pi G\rho md'$ である。

図cのように角度 θ をとると万有引力の x' 軸方向の成分は



図c

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho md'\sin\theta$$

であり

$$\sin\theta=\frac{x'}{d'}$$

であるから，加速度を α' として運動方程式を立てると

$$m\alpha'=-\frac{4}{3}\pi G\rho md'\times\frac{x'}{d'}$$

よって

$$\alpha' = -\frac{4}{3}\pi G\rho x'$$

ゆえに，(b) と同様，小球 m は $x'=0$ を中心とし，角振動数 ω_0 の単振動を行う。

A′ で初速 0 であったから T_1 は単振動の周期に等しく

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

(2)(a)　物体 D の中心方向の運動方程式は

$$m\frac{{v_0}^2}{R} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho m}{R^2}$$

よって　$v_0 = 2R\sqrt{\dfrac{\pi G\rho}{3}}$

物体 D が H から B に到達するのにかかる時間は等速円運動の $\dfrac{1}{4}$ 周期なので

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi R}{v_0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \frac{1}{4}T_0$$

つまり，単振動の $\dfrac{1}{4}$ 周期と一致する。

ところで，単振動が $x<-R$，$R<x$ でも同様に行われるとして，その振幅を a，速さの最大値を $a\omega_0$ とすると，図 d のように，この単振動を半径 a，速さ $a\omega_0$ の等速円運動の正射影であるとみなすことができる。

したがって，図 d のように

$$R = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$v_1 = a\omega_0\sin\frac{\pi}{4} = \frac{a\omega_0}{\sqrt{2}}$$

a を消去して

$$v_1 = R\omega_0 = 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}$$

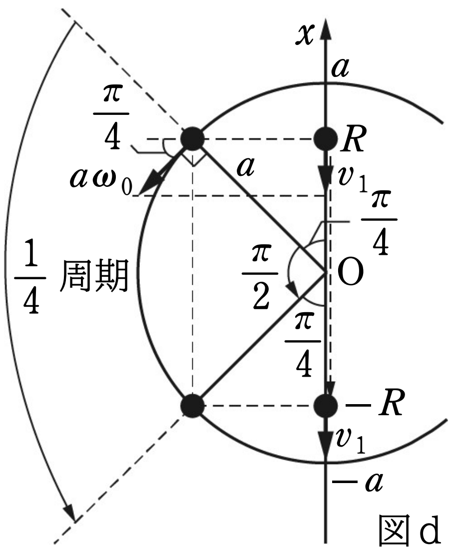


図 d

(b)　位置 B′ での物体 D と小球 m の衝突のようすは，小球 m の速さが $2v_0$ となるから図 e のようになり，衝突の直前，直後で運動量の和が保存すると考えられる。合体した直後の速度を B′ における接線方向成分，法線方向成分に分けて，それぞれ V_1，V_2 とすれば運動量保存の式は接線方向

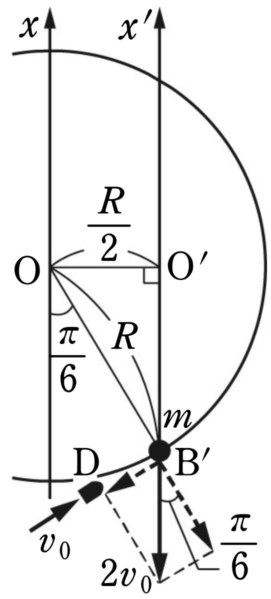


図 e

$$mv_0+m(-v_0)=2mV_1$$

法線方向

$$0+m\cdot\sqrt{3}\,v_0=2mV_2$$

となり $V_1=0$，$V_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$ を得る。

つまり，合体した物体は，法線方向に速度 V_2 で打ち出されるので，求める最大距離を y とすれば，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\cdot 2mV_2{}^2-G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot 2m}{R}=0-G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot 2m}{y}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot 2mV_2{}^2&=m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\right)^2\\&=\frac{3}{4}m\left(2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}\right)^2\\&=\pi G\rho mR^2\end{aligned}$$

ゆえに

$$\pi G\rho mR^2-\frac{8}{3}\pi G\rho mR^2=-\frac{8}{3}\pi G\rho m\frac{R^3}{y}$$

したがって　$y=\dfrac{8}{5}R$

(3)　$v_0=2R\sqrt{\dfrac{\pi G\rho}{3}}$ において

$$2R=2\times(5.0\times10^6)=1.0\times10^7\ \mathrm{m}$$

$$\frac{\pi}{3}=\frac{3.0}{3}=1.0$$

$$\begin{aligned}G\rho&=(6.7\times10^{-11})\times(5.4\times10^3)\\&=36.18\times10^{-8}\ \mathrm{N/(kg\cdot m)}\end{aligned}$$

ここで

$$6^2<36.18<6.05^2$$

なので　$(6.05^2=36.6025)$

$$\sqrt{36.18\times10^{-8}}\fallingdotseq 6.0\times10^{-4}$$

であり

$$v_0\fallingdotseq(1.0\times10^7)\times(6.0\times10^{-4})$$

$=6.0\times10^3$ m/s

(2)(a) より，物体 D の等速円運動の周期は

$$T_0=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\fallingdotseq\frac{3.0}{6.0\times10^{-4}}=5.0\times10^3\ \mathrm{s}$$