$\boxed{1}$［2016 センター］

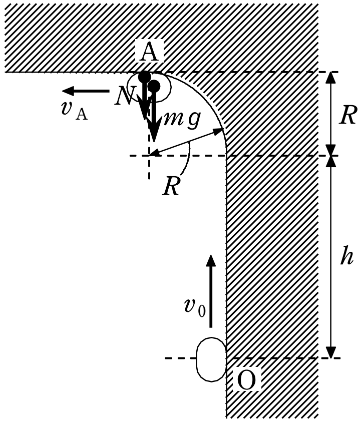
解答 (1) ⑥ (2) ②

(1) 点 O と点 A で力学的エネルギーが保存する。
よって，重力による位置エネルギーの基準面を点 O を通る水平面とすると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv_A{}^2+mg(h+R)$$

ゆえに $v_A=\sqrt{v_0{}^2-2g(R+h)}$

以上より，正しいものは ⑥。



(2) 小物体が点 A に達する直前に面から受ける垂直抗力を N とすると，円運動の中心方向の運動方程式から

$$m\frac{v_A{}^2}{R}=N+mg \qquad \text{ゆえに} \quad N=m\frac{v_A{}^2}{R}-mg$$

このとき，$N\geqq 0$ であれば，小物体は円運動をして点 A を通過するので

$$N=m\frac{v_A{}^2}{R}-mg\geqq 0 \qquad \text{ゆえに} \quad v_A\geqq\sqrt{gR}$$

したがって，v_A の最小値は $\sqrt{gR}$。

以上より，正しいものは ②。

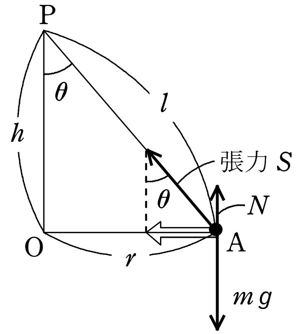
(補足) 点 A を通過後，小物体の運動は水平投射運動となり，天井から離れる。

$\boxed{2}$［1993 センター］

解答 (1) ⑤ (2) ② (3) ① (4) ② (5) ②

(1) $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2=\frac{1}{2}m\omega^2(l^2-h^2)$

よって答えは ⑤



(2) 糸の張力を S，糸が鉛直方向となす角を θ とすると，向心力は $S\sin\theta$ となっているから，A の運動方程式は

$$mr\omega^2=S\sin\theta=S\cdot\frac{r}{l} \qquad \text{ゆえに} \ S=ml\omega^2$$

よって答えは ②

(3) 鉛直方向の力のつりあいより

$$N+S\cos\theta=mg$$

ゆえに $N=mg-S\cdot\frac{h}{l}=mg-mh\omega^2$

よって，グラフは上に凸の放物線となる。答えは ①

(4) $N=0$ のとき A は台から離れる。

$N=mg-mh\omega^2=0$ より $\omega=\sqrt{\frac{g}{h}}$ よって答えは ②

(5) 向心力がなくなると，物体 A はそのときの速度の方向，すなわち Q における円の接線方向に進む。
よって答えは ②

$\boxed{3}$

解答 (1) $mg\cos\theta-m\frac{v^2}{r}$

(2) 小物体の運動方向は円筒面の接線方向で，抗力と直角をなすから。(30字)

(3) $\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}$ (4) 0 (5) $\frac{2}{3}$ (6) $\sqrt{\frac{2}{3}gr}$ (7) $2\sqrt{gr}$

(8) $\sqrt{gr}$

ヒント (1) 半径方向の運動方程式を立てる。

(3), (7) 力学的エネルギー保存則から求められる。

(4) 点 C で円筒表面から離れる $\Longrightarrow$ (垂直抗力)$=0$

(5) $\theta=\theta_0$ のとき (4) が成りたつ。

(8) ただちに円筒面を離れる条件 $\Longrightarrow$ (垂直抗力)$\leqq 0$

(1) 円筒表面から受ける垂直抗力を N として，点 B を通過するときに小物体が受ける力を図示すると図 a のようになる。半径方向の運動方程式を立てると

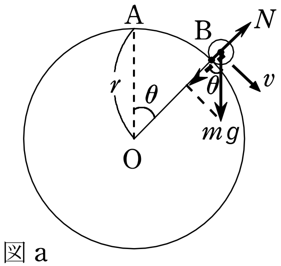


図 a

$$m\frac{v^2}{r}=mg\cos\theta-N$$

ゆえに $\boldsymbol{N=mg\cos\theta-m\dfrac{v^2}{r}}$ …… ①

(2) **小物体の運動方向は円筒面の接線方向で，抗力と直角をなすから**[※A←]**。**

(3) 点 A と点 B における力学的エネルギー保存則「$mgh+\dfrac{1}{2}mv^2=$一定」より

$$mgr+0=mgr\cos\theta+\frac{1}{2}mv^2 \text{※B←}$$

ゆえに $\boldsymbol{v=\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}$ …… ②

(4) 点 C で円筒面から離れるので，垂直抗力は 0 になる。$\boldsymbol{N=0}$

(5) $\boldsymbol{\theta=\theta_0}$ のとき，① 式が $N=0$ となる。① 式の v に ② 式を用いると

$$0=mg\cos\theta_0-\frac{m}{r}\left\{\sqrt{2gr(1-\cos\theta_0)}\right\}^2$$

よって $\cos\theta_0-2(1-\cos\theta_0)=0$ ゆえに $\cos\theta_0=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ …… ③

(6) ② 式の $\cos\theta$ に ③ 式を代入して，点 C での速さ v_C は

$$v_C=\sqrt{2gr\left(1-\frac{2}{3}\right)}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{2}{3}gr}}$$

(7) 点 A と床に衝突する直前における力学的エネルギー保存則[※C←]「$mgh+\dfrac{1}{2}mv^2=$一定」より，求める速さを v_1 とすると

$$mg\cdot 2r+0=0+\frac{1}{2}mv_1^2 \text{※D←} \qquad \text{ゆえに} \quad v_1=\boldsymbol{2\sqrt{gr}}$$

(8) 点 A での初速を v_0 とし，点 A において小物体の受ける力を図示すると図 b のようになる。半径方向の運動方程式を立てると

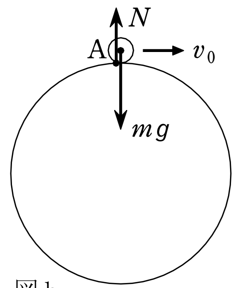


図 b

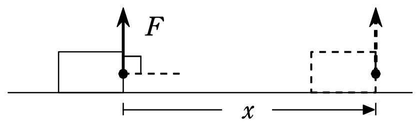
と $m\dfrac{v_0^2}{r}=mg-N$ ゆえに $N=mg-m\dfrac{v_0^2}{r}$

ただちに円筒面から離れる条件は $N\leqq 0$ である。これより

$$mg-m\frac{v_0^2}{r}\leqq 0 \qquad v_0^2\geqq gr$$

ゆえに $v_0\geqq\boldsymbol{\sqrt{gr}}$

←※A 物体の運動方向に直角にはたらく力は仕事をしない。



$$W=F\cos 90^\circ\cdot x=0\ (\mathrm{J})$$

←※B この式では，位置エネルギーの基準を円筒面の中心 O にしている。

←※C 点 C と床での力学的エネルギー保存則を用いても解くことができるが，速さが 0 である点 A を使ったほうが式が簡単で計算しやすい。

←※D この式では，位置エネルギーの基準を床面にしている。

$\boxed{4}$

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\sqrt{2gh}$ (2) $\sqrt{2g(h-2r)}$ (3) $\left(\dfrac{2h-5r}{r}\right)mg$ (4) $\dfrac{5}{2}r$ (5) r

(6) $\sqrt{gr\sin\theta}$ (7) $\dfrac{r}{2}(2+3\sin\theta)$

(8) x 座標：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r-\dfrac{\sqrt{2gr}}{4}t$，$y$ 座標：$\dfrac{3}{2}r+\dfrac{\sqrt{6gr}}{4}t-\dfrac{1}{2}gt^2$

(9) T：$\sqrt{\dfrac{6r}{g}}$，y：0

(1) 点 B を重力による位置エネルギーの基準の位置として，点 A と点 B での力学的エネルギーの保存より

$$mgh=\frac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{よって} \quad v_B=\boldsymbol{\sqrt{2gh}}$$

(2)　点 A と点 D での力学的エネルギーの保存より

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{D}}{}^2+mg\cdot 2r$$

よって　$v_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{\sqrt{2g(h-2r)}}$

(3)　点 D では，小球 P は重力と垂直抗力の合力を向心力として，回転半径 r の円運動をしている。円運動の運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r}=f$」より

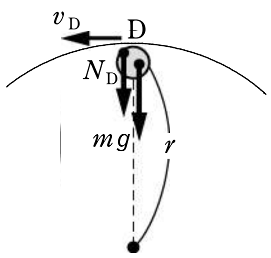


図 a

$$m\frac{v_{\mathrm{D}}{}^2}{r}=N_{\mathrm{D}}+mg$$

よって　$N_{\mathrm{D}}=\dfrac{m}{r}\{\sqrt{2g(h-2r)}\}^2-mg$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{2h-5r}{r}\right)mg}$$

(4)　点 D でレールから離れずに通過できればよいので，$N_{\mathrm{D}}\geqq 0$ となる。

$$N_{\mathrm{D}}=\left(\frac{2h-5r}{r}\right)mg\geqq 0$$

よって　$h\geqq\dfrac{5}{2}r$

ゆえに，h の最小値は　$h_1=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}r}$

(5)　点 A と点 C での力学的エネルギーの保存より

$mgh_2=mgr$　よって　$h_2=\boldsymbol{r}$

(6)　点 F でレールから離れるので，このときレールからの垂直抗力は 0 となる。したがって，重力の半径方向の成分のみを向心力として円運動している。円運動の運動方程式より

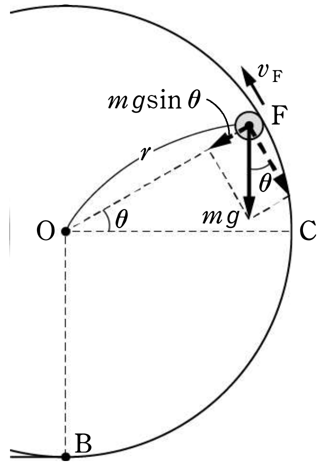


図 b

$$m\frac{v_{\mathrm{F}}{}^2}{r}=mg\sin\theta$$

よって

$$v_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\sqrt{gr\sin\theta}}$$

(7)　点 A と点 F での力学的エネルギーの保存より

$$mgh_{\mathrm{F}}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{F}}{}^2+mgr(1+\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m(\sqrt{gr\sin\theta})^2+mgr(1+\sin\theta)$$

式を整理して　$h_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\dfrac{r}{2}(2+3\sin\theta)}$

(8)　$t=0$ における小球 P の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると

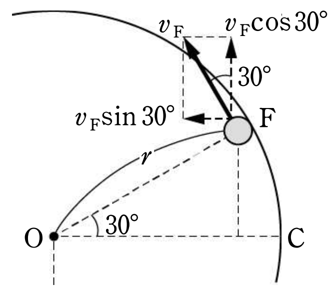


図 c

$$x_0=r\cos 30°$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$y_0=r(1+\sin 30°)$$

$$=\frac{3}{2}r$$

また $t=0$ における速さ v_{F} は $\theta=30°$ より

$$v_{\mathrm{F}}=\sqrt{gr\sin 30°}=\sqrt{\frac{gr}{2}}$$

$t=0$ における v_{F} の x 成分，y 成分をそれぞれ v_{0x}，v_{0y} とすると

$$v_{0x}=-v_{\mathrm{F}}\sin 30°=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}$$

$$v_{0y}=v_{\mathrm{F}}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}$$

小球 P は $(x_0,\ y_0)$ から斜方投射されたと考えて

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}r+v_{0x}t=\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{2gr}}{4}t$$

$$y=\frac{3}{2}r+v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=\frac{3}{2}r+\frac{\sqrt{6gr}}{4}t-\frac{1}{2}gt^2$$

(9)　(8) の結果で $t=T$ として

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{2gr}}{4}T=0$$

よって　$T=\sqrt{\frac{6r}{g}}$

また

$$y=\frac{3}{2}r+\frac{\sqrt{6gr}}{4}\cdot\sqrt{\frac{6r}{g}}-\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right)^2=0$$