

第8章～数列～ 第1講 例題

1

【解答】 (1) $a_n = -3n + 103$, $a_{35} = -2$
 (2) (ア) $2n - 48$ (イ) 第83項 (ウ) 第25項

【解説】 (1) 初項が100, 公差が $97 - 100 = -3$ であるから, 一般項は
 $a_n = 100 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 103$
 また $a_{35} = -3 \cdot 35 + 103 = -2$
 (2) (ア) 初項を a , 公差を d とすると, $a_{59} = 70$, $a_{66} = 84$ であるから

$$\begin{cases} a + 58d = 70 \\ a + 65d = 84 \end{cases}$$
 これを解いて $a = -46$, $d = 2$
 よって, 一般項は $a_n = -46 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 48$
 (イ) $a_n = 118$ とすると $2n - 48 = 118$
 これを解いて $n = 83$ よって 第83項
 (ウ) $a_n > 0$ とすると $2n - 48 > 0$ これを解いて $n > 24$
 したがって, 初めて正になるのは 第25項

2

【解答】 (1) 448 (2) 1920

【解説】 (1) この等差数列の初項は85, 公差は -7 であるから, 末項43が第 n 項であるとすると
 $85 + (n-1) \cdot (-7) = 43$
 すなわち $-7n + 92 = 43$ よえに $n = 7$
 よって, 初項85, 末項43, 項数7の等差数列の和を求めて
 $\frac{1}{2} \cdot 7(85 + 43) = 448$
 (2) 公式 $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$ において, $n = 32$, $a = -2$, $d = 4$ であるから,
 求める和は $\frac{1}{2} \cdot 32(-4 + 31 \cdot 4) = 1920$

3

【解答】 (1) 第37項 (2) 第18項, 648

【解説】 (1) 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n[2 \cdot 70 + (n-1) \cdot (-4)] = \frac{1}{2}n(144 - 4n)$$

$$= 2n(36 - n) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$
 $S_n < 0$ とすると $2n(36 - n) < 0$
 $n > 0$ であるから $36 - n < 0$ よって $n > 36$
 これを満たす最小の自然数 n は $n = 37$
 ゆえに, 初項から第37項までの和が初めて負となる。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 70 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 74$
 $a_n < 0$ とすると $-4n + 74 < 0$ よって $n > \frac{74}{4} = 18.5$
 これを満たす最小の自然数 n は $n = 19$
 ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ は第19項以降が負になるから, 初項から第18項までの和が最大となる。
 その最大値は $S_{18} = 2 \cdot 18(36 - 18) = 648$

【別解】 ①から $S_n = 2n(36 - n) = -2(n^2 - 36n) = -2(n - 18)^2 + 2 \cdot 18^2$
 $= -2(n - 18)^2 + 648$
 よって, S_n は $n = 18$ で最大値648をとる。
 ゆえに, 初項から第18項までの和が最大で, その最大値は 648

4

【解答】 (1) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, $a_8 = -4374$ (2) $32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
 【解説】 (1) 初項が2, 公比が $\frac{-6}{2} = -3$ であるから, 一般項は
 $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$
 また $a_8 = 2 \cdot (-3)^{8-1} = -4374$
 (2) 初項を a , 公比を r , 一般項を a_n とすると, $a_2 = 48$, $a_5 = 162$ であるから

$$\begin{cases} ar = 48 & \dots\dots \textcircled{1} \\ ar^4 = 162 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$
 ②から $ar \cdot r^3 = 162$ これに①を代入して $48r^3 = 162$
 ゆえに $r^3 = \frac{27}{8}$ すなわち $r^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ r は実数であるから $r = \frac{3}{2}$
 このとき, ①から $a = 48 \cdot \frac{2}{3} = 32$ したがって $a_n = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

5

【解答】 (1) 315 (2) 189
 【解説】 (1) $\frac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = 5(2^6 - 1) = 315$
 (2) 末項96が第 n 項とすると $96 = 3 \cdot 2^{n-1}$
 よって $2^{n-1} = 32$ すなわち $2^{n-1} = 2^5$
 ゆえに $n - 1 = 5$ よって $n = 6$
 したがって, 求める和は $\frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

【別解】 初項 a , 公比 r の等比数列の第 n 項を l とすると, 初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - r \cdot ar^{n-1}}{1 - r} = \frac{a - rl}{1 - r}$$
 よって, 求める和は次のように計算できる。

$$\frac{3 - 2 \cdot 96}{1 - 2} = 189$$

6

【解答】 $x = 4$, $y = 36$
 【解説】 数列 x , 12, y が等比数列であるから
 $12^2 = xy$ よって $xy = 144 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 数列68, y , x が等差数列であるから
 $2y = 68 + x$ よって $x = 2y - 68 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ②を①に代入して $(2y - 68)y = 144$ 整理して $y^2 - 34y - 72 = 0$
 ゆえに $(y + 2)(y - 36) = 0$ よって $y = -2, 36$
 条件より, $y > 0$ であるから $y = 36$

これを②に代入して $x = 4$ これは条件 $0 < x < y$ を満たす。
 したがって $x = 4$, $y = 36$

第1講 例題演習

1

- 【解答】 (1) $a_n = -5n + 18$, $a_{15} = -57$
 (2) (ア) $-2n + 59$ (イ) 第85項 (ウ) 第30項

【解説】 (1) 初項が13, 公差が $8 - 13 = -5$ であるから, 一般項は

$$a_n = 13 + (n-1) \cdot (-5) = -5n + 18$$

また $a_{15} = -5 \cdot 15 + 18 = -57$

- (2) (ア) 初項を a , 公差を d とすると, $a_{53} = -47$, $a_{77} = -95$ であるから
 $a + 52d = -47$, $a + 76d = -95$ これを解いて $a = 57$, $d = -2$

ゆえに $a_n = 57 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 59$

- (イ) $a_n = -111$ とすると $-2n + 59 = -111$

これを解いて $n = 85$ よって 第85項

- (ウ) $a_n < 0$ とすると $-2n + 59 < 0$ よって $n > \frac{59}{2} = 29.5$

したがって, 初めて負になるのは 第30項

2

- 【解答】 (1) $S = 1617$ (2) $S = -4750$

- 【解説】 (1) 初項が1, 公差が3であるから, 末項97が第 n 項であるとすると
 $1 + (n-1) \cdot 3 = 97$ よって $n = 33$

ゆえに, 初項1, 末項97, 項数33の等差数列の和を求めて

$$S = \frac{1}{2} \cdot 33(1+97) = 1617$$

- (2) $S = \frac{1}{2} \cdot 100(2 \cdot 200 + (100-1) \cdot (-5)) = -4750$

3

- 【解答】 (1) なりえない (2) $n = 76$ (3) $n = 38$

【解説】 初項を a , 公差を d , 第 n 項を a_n とすると $a_5 = a + 4d$, $a_{10} = a + 9d$
 $a_5 = 100$, $a_{10} = 85$ であるから $a + 4d = 100$, $a + 9d = 85$

これを解いて $a = 112$, $d = -3$

よって $a_n = 112 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 115$

- (1) $a_n = 50$ とすると $-3n + 115 = 50$

ゆえに $3n = 65$ これを満たす自然数 n は存在しない。

よって, 50はこの数列の項となりえない。

- (2) $S_n = \frac{1}{2}n(2 \cdot 112 + (n-1) \cdot (-3)) = \frac{1}{2}n(227 - 3n)$

$S_n < 0$ とすると $n(227 - 3n) < 0$ すなわち $n(3n - 227) > 0$

$n > 0$ であるから $3n - 227 > 0$ ゆえに $n > \frac{227}{3} = 75.6\cdots$

n は自然数であるから $n \geq 76$ よって, 求める n の値は $n = 76$

- (3) $a_n > 0$ となる最大の n に対して S_n は最大となるから

$a_n = -3n + 115 > 0$ よって $n < \frac{115}{3} = 38.3\cdots$

よって, $n = 38$ のとき, 和 S_n は最大となる。

【別解】 (2) から

$$S_n = \frac{1}{2}n(-3n + 227) \\ = -\frac{3}{2}\left(n - \frac{227}{6}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{227}{6}\right)^2$$

$\frac{227}{6} = 37.8\cdots$ であるから 37 と 38 では 38 に近い。

したがって, $n = 38$ のとき, 和 S_n は最大となる。

4

- 【解答】 (1) $a_n = 45\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

- (2) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ または $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

【解説】

- (1) 初項が45, 公比が $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ の等比数列であるから, 一般項は

$$a_n = 45\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

- (2) 初項を a , 公比を r とすると $a_n = ar^{n-1}$

$a_3 = 12$, $a_7 = 192$ であるから

$$ar^2 = 12 \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad ar^6 = 192 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$ar^6 = ar^2 \cdot r^4$ であるから, ①を②に代入して $12r^4 = 192$

ゆえに $r^4 = 16$ よって $r = \pm 2$

- ①から, $r = 2$ のとき $a = 3$, $r = -2$ のとき $a = 3$

したがって, 一般項は $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ または $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

5

- 【解答】 (1) 122 (2) 122

【解説】

(1) $\frac{2\{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = \frac{2\{1 - (-243)\}}{4} = \frac{2 \cdot 244}{4} = 122$

- (2) 項数を n とする。

$162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2$ から $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{81}$ すなわち $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

ゆえに $n - 1 = 4$ よって $n = 5$

したがって, 求める和は $\frac{162\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 122$

【別解】 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和 S は $S = \frac{a - rl}{1 - r} = \frac{rl - a}{r - 1}$

よって $\frac{162 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 122$

6

- 【解答】 $a = 5$, $b = 15$ または $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{15}{2}$

【解説】

数列 -5 , a , b が等差数列であるから

$$2a = -5 + b \quad \cdots \cdots \text{①}$$

数列 a , b , 45 が等比数列であるから

$$b^2 = 45a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

- ①から $b = 2a + 5$ $\cdots \cdots$ ③ ②に代入して $(2a + 5)^2 = 45a$

整理して $4a^2 - 25a + 25 = 0$ これを解いて $a = 5, \frac{5}{4}$

- ③から $a = 5, b = 15$ または $a = \frac{5}{4}, b = \frac{15}{2}$

第1講 レベルA

1

【解答】 7, 9, 11

【解説】

3つの数を $a-d, a, a+d$ とおく。条件から

$$(a-d)+a+(a+d)=27 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad (a-d)\cdot a\cdot(a+d)=693 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① から $3a=27$ よって $a=9$

これを②に代入すると $(9-d)\cdot 9\cdot(9+d)=693$ ゆえに $81-d^2=77$

よって $d^2=4$ これを解いて $d=\pm 2$

$d=2$ のとき $a-d=7, a+d=11$

$d=-2$ のとき $a-d=11, a+d=7$

したがって、求める3つの数は 7, 9, 11

【別解】 3つの数を a, b, c とする。

これらが等差数列をなすから $2b=a+c \cdots \cdots \textcircled{1}$

また、条件から $a+b+c=27 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad abc=693 \cdots \cdots \textcircled{3}$

①, ② から $b=9, c=18-a \cdots \cdots \textcircled{4}$

④ を③に代入すると $a\cdot 9\cdot(18-a)=693$

整理すると $(a-11)(a-7)=0$ ゆえに $a=7, 11$

$a=7$ のとき ④ から $c=11$ よって $(a, b, c)=(7, 9, 11)$

$a=11$ のとき ④ から $c=7$ よって $(a, b, c)=(11, 9, 7)$

よって、求める3つの数は 7, 9, 11

2

【解答】 (1) 6570 (2) 2821 (3) 3942 (4) 17089 (5) 8446

【解説】

20から200までの自然数のうち、自然数 n の倍数の和を $S(n)$ とする。

(1) 20から200までの自然数のうち、3の倍数を順に並べると

$$3\cdot 7, 3\cdot 8, 3\cdot 9, \cdots, 3\cdot 66$$

これは初項21, 末項198, 項数 $66-7+1=60$ の等差数列であるから

$$S(3)=\frac{1}{2}\cdot 60\cdot(21+198)=6570$$

(2) 20から200までの自然数のうち、7の倍数を順に並べると

$$7\cdot 3, 7\cdot 4, 7\cdot 5, \cdots, 7\cdot 28$$

これは初項21, 末項196, 項数 $28-3+1=26$ の等差数列であるから

$$S(7)=\frac{1}{2}\cdot 26\cdot(21+196)=2821$$

(3) 20から200までの自然数のうち、5で割って2余る数を順に並べると

$$5\cdot 4+2, 5\cdot 5+2, 5\cdot 6+2, \cdots, 5\cdot 39+2$$

これは初項22, 末項197, 項数 $39-4+1=36$ の等差数列であるから、求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 36\cdot(22+197)=3942$$

(4) 20から200までの自然数の和は

(1から200までの自然数の和)-(1から19までの自然数の和)

$$=\frac{1}{2}\cdot 200\cdot(200+1)-\frac{1}{2}\cdot 19\cdot(19+1)=20100-190=19910$$

(2) から、求める和は $19910-2821=17089$

(5) 3かつ7の倍数は、21の倍数である。

20から200までの自然数のうち、21の倍数を順に並べると

$$21\cdot 1, 21\cdot 2, 21\cdot 3, \cdots, 21\cdot 9$$

これは初項21, 末項189, 項数9の等差数列であるから

$$S(21)=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(21+189)=945$$

よって、求める和は $S(3)+S(7)-S(21)=6570+2821-945=8446$

3

【解答】 295

【解説】

初項を a , 公差を d , 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(2a+4d)=5(a+2d), \quad S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(2a+9d)=5(2a+9d)$$

$S_5=-5, S_{10}=-5+145=140$ であるから $5(a+2d)=-5, 5(2a+9d)=140$

ゆえに $a+2d=-1, 2a+9d=28$ これを解いて $a=-13, d=6$

よって、求める和は $S_{15}-S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot\{2\cdot(-13)+14\cdot 6\}-140$
 $=435-140=295$

4

【解答】 (1) 証明略, 初項-3, 公差2 (2) 証明略, 初項1, 公差6

【解説】

(1) $a_n=2n-5$ であるから

$$a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)-5\}-(2n-5)=2 \quad (\text{一定})$$

よって、数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

公差は2, 初項は $a_1=2\cdot 1-5=-3$

(2) $b_n=a_{3n}=2\cdot(3n)-5=6n-5$

ゆえに $b_{n+1}-b_n=\{6(n+1)-5\}-(6n-5)=6 \quad (\text{一定})$

よって、数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

公差は6, 初項は $b_1=6\cdot 1-5=1$

5

【解答】 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{5}; a_n=\frac{2}{n+1}$

【解説】

数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$: $1, \frac{1}{x}, 2, \frac{1}{y}, \cdots$ が等差数列になる。

よって $2\cdot\frac{1}{x}=1+2, 2\cdot 2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ゆえに $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{5}$

この数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ の一般項は $1+(n-1)\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{n+1}{2}$

したがって $a_n=\frac{2}{n+1}$

6

【解答】 5, -10, 20

【解説】

(解1) 等比数列をなす3つの実数を a, ar, ar^2 とおく。

条件から $a+ar+ar^2=15 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$a\cdot ar\cdot ar^2=-1000 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② から $a^3r^3=-1000$ すなわち $(ar)^3=(-10)^3$

ar は実数であるから $ar=-10 \cdots \cdots \textcircled{3}$

①の両辺に r を掛けて $ar+ar^2+ar^3=15r$ すなわち $ar(1+r+r^2)=15r$

③を代入して $-10(1+r+r^2)=15r$ 整理すると $2r^2+5r+2=0$

よって $(r+2)(2r+1)=0$ ゆえに $r=-2, -\frac{1}{2}$

③から $r=-2$ のとき $a=5, r=-\frac{1}{2}$ のとき $a=20$

$a=5, r=-2$ のとき $ar=-10, ar^2=20$

$a=20, r=-\frac{1}{2}$ のとき $ar=-10, ar^2=5$

よって、求める3つの実数は 5, -10, 20

(解2) 等比数列をなす3つの実数を a, b, c とおくと

$$b^2=ac \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件から $a+b+c=15 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad abc=-1000 \cdots \cdots \textcircled{3}$

①, ③ から $b\cdot b^2=-1000$ すなわち $b^3=(-10)^3$

b は実数であるから $b=-10$

これを①, ②に代入すると $ac=100 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad a+c=25 \cdots \cdots \textcircled{5}$

⑤から $c=25-a \cdots \cdots \textcircled{6}$

これを④に代入して $a(25-a)=100$

よって $a^2-25a+100=0$ すなわち $(a-5)(a-20)=0$

ゆえに $a=5, 20$

⑥から $a=5$ のとき $c=20, a=20$ のとき $c=5$

したがって、求める3つの実数は 5, -10, 20

7

【解答】 19608 円

【解説】

毎年初めの元金は、1年ごとに利息がついて1.02倍となる。

1年目初めの x 円は、5年後末には $x(1.02)^5$ 円

2年目初めの x 円は、5年後末には $x(1.02)^4$ 円

⋮

5年目初めの x 円は、5年後末には $x\cdot 1.02$ 円 になる。

よって、5年間の貯金の総額は

$$x\cdot 1.02+x(1.02)^2+\cdots+x(1.02)^5=\frac{1.02x\{(1.02)^5-1\}}{1.02-1}$$

$$=\frac{1.02x\times 0.1}{0.02}$$

これが10万円になるとすると $\frac{1.02x\times 0.1}{0.02}=100000$

これを解いて $x=19607.8\cdots$

円未満を切り上げて、求める金額は 19608 円

第1講 レベルB

1

【解答】 $2(m+n)(n-m)$

【解説】

m 以上 n 以下の分数で、5 を分母とするもの (整数も含む) を書き出すと

$$\frac{5m}{5}, \frac{5m+1}{5}, \frac{5m+2}{5}, \dots, \frac{5n-1}{5}, \frac{5n}{5}$$

これは初項 m , 末項 n , 公差 $\frac{1}{5}$, 項数 $5(n-m)+1$ の等差数列である。

よって、その和を S_1 とすると $S_1 = \frac{1}{2}[5(n-m)+1](m+n)$

また、 m 以上 n 以下の整数の和を S_2 とすると $S_2 = \frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$

求める和は $S_1 - S_2$ であるから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[5(n-m)+1](m+n) - \frac{1}{2}(n-m+1)(m+n) \\ &= \frac{1}{2}(m+n)\{5(n-m)+1 - (n-m+1)\} \\ &= \frac{1}{2}(m+n) \cdot 4(n-m) = 2(m+n)(n-m) \end{aligned}$$

2

【解答】 (1) 78 (2) 162

【解説】

初項を a , 公比を r , 初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると、 $S_{10}=10a$ となり $10a=6$

このとき、 $S_{20}=20a=12 \neq 24$ であるから、条件を満たさない。

よって $r \neq 1$

ゆえに $S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 6 \dots \dots \textcircled{1}$, $S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 24 \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ から $\frac{a(r^{20}-1)}{r-1} \cdot \frac{r-1}{a(r^{10}-1)} = \frac{24}{6}$

よって $r^{10}+1=4$ すなわち $r^{10}=3 \dots \dots \textcircled{3}$

(1) $S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \{(r^{10})^2 + r^{10} + 1\}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ を代入して $S_{30} = 6 \cdot (3^2 + 3 + 1) = 78$

(2) $S_{40} = \frac{a(r^{40}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} \{(r^{10})^2 + 1\}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を代入して $S_{40} = 24 \cdot (3^2 + 1) = 240$

求める第31項から第40項までの和は $S_{40} - S_{30}$ であるから

$$S_{40} - S_{30} = 240 - 78 = 162$$

3

【解答】 $c_n = 2^{2n-1}$

【解説】

$a_1=2$, $b_1=2$ であるから $c_1=2$

数列 $\{a_n\}$ の第 l 項が数列 $\{b_n\}$ の第 m 項に等しいとすると

$$3l-1=2^m$$

ゆえに $b_{m+1} = 2^{m+1} = 2^m \cdot 2 = (3l-1) \cdot 2 = 3 \cdot 2l - 2 \dots \dots \textcircled{1}$

よって、 b_{m+1} は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

$\textcircled{1}$ から $b_{m+2} = 2b_{m+1} = 3 \cdot 4l - 4 = 3(4l-1) - 1$

ゆえに、 b_{m+2} は数列 $\{a_n\}$ の項である。

よって、数列 $\{c_n\}$ は公比 2^2 の等比数列である。

$c_1=2$ であるから $c_n = 2 \cdot (2^2)^{n-1} = 2^{2n-1}$

4

【解答】 3, 9, 15, 21, 27 または 27, 21, 15, 9, 3 または 23, 25, 27

または 27, 25, 23

【解説】

項の最小値を a , 項数を n とすると $\frac{n(a+27)}{2} = 75$

ゆえに $n(a+27) = 150$

また、 $0 < a \leq 27$ であるから $27 < a+27 \leq 54$

したがって $(n, a+27) = (5, 30), (3, 50)$

ゆえに $(n, a) = (5, 3), (3, 23)$

$n=5, a=3$ のとき、次の場合がある。

[1] 初項が 3, 末項が 27, 項数が 5 の等差数列。

[2] 初項が 27, 末項が 3, 項数が 5 の等差数列。

[1] のとき、公差を d_1 とすると $3+(5-1)d_1=27$

ゆえに $d_1=6$

よって、求める数列は 3, 9, 15, 21, 27

[2] のとき、公差を d_2 とすると $27+(5-1)d_2=3$

ゆえに $d_2=-6$

よって、求める数列は 27, 21, 15, 9, 3

$n=3, a=23$ のとき、上と同様に考えると、求める数列は

23, 25, 27 または 27, 25, 23

第2講 例題

1

【解答】 (1) $2+5+8+\dots+(3n-1)$ (2) $5^2+5^3+5^4+\dots+5^9$

(3) $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2(n-1)^2$

【解説】

(1) $\sum_{k=1}^n (3k-1) = 2+5+8+\dots+(3n-1)$

(2) $\sum_{m=2}^9 5^m = 5^2+5^3+5^4+\dots+5^9$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2(n-1)^2$

2

【解答】 (1) $\sum_{k=1}^5 (k+2)$ (2) $\sum_{k=1}^6 (3k-2)^2$

【解説】

(1) 数列 3, 4, 5, 6 の第 k 項は $k+2$

よって (与式) $= \sum_{k=1}^n (k+2)$

(2) 数列 $1^2, 4^2, 7^2, 10^2$ の第 k 項は $(3k-2)^2$

よって (与式) $= \sum_{k=1}^n (3k-2)^2$

3

【解答】 (1) $n(n+4)$ (2) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$ (3) $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4) $\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$ (5) $\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

【解説】

(1) $\sum_{k=1}^n (2k+3) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 3 = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 3n$
 $= n^2 + 4n = n(n+4)$

(2) $\sum_{k=1}^n (k-1)(k-5) = \sum_{k=1}^n (k^2 - 6k + 5) = \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 5$
 $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 5n$
 $= \frac{1}{6}n[(n+1)(2n+1) - 18(n+1) + 30]$
 $= \frac{1}{6}n(2n^2 - 15n + 13) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(3) $\sum_{k=1}^n (k^3 - 4k) = \sum_{k=1}^n k^3 - 4 \sum_{k=1}^n k = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1) = \frac{1}{4}n(n+1)[n(n+1) - 8]$
 $= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 5k) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5 \sum_{k=1}^{n-1} k$
 $= \frac{1}{6}(n-1)[(n-1)+1][2(n-1)+1] - 5 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n-1)+1$
 $= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - \frac{5}{2}n(n-1) = \frac{1}{6}n(n-1)[(2n-1)-15]$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(2n-16) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$$

(5) $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

4

【解答】 (1) $n^2(2n^2-1)$ (2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

【解説】

(1) 第 k 項は $(2k-1)^3$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 &= 8 \sum_{k=1}^n k^3 - 12 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 8 \cdot \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 - 12 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= n(n+1)(2n^2-2n+1) - n = n^2(2n^2-1) \end{aligned}$$

(2) 第 k 項は $k(2k-1)$ であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(2k-1) &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2(2n+1)-3) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1) \end{aligned}$$

5

【解答】 第 k 項, 和 S_n の順に (1) $k(k+1), \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $3^k-1, \frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1), \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

【解説】

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 第 k 項は初項 2, 公差 2, 項数 k の等差数列の和であるから

$$a_k = \frac{1}{2}k(2 \cdot 2 + (k-1) \cdot 2) = k(k+1)$$

よって, 求める和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2+k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(2) この数列の第 k 項は $2+2 \cdot 3+2 \cdot 3^2+\dots+2 \cdot 3^{k-1}$

これは, 初項 2, 公比 3 の等比数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k = \frac{2(3^k-1)}{3-1} = 3^k-1$$

よって, 求める和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n (3^k-1) = \sum_{k=1}^n 3^k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{3(3^n-1)}{3-1} - n = \frac{3^{n+1}}{2} - n - \frac{3}{2}$$

(3) 第 k 項は $\sum_{m=1}^k m^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって, 求める和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (2k^3+3k^2+k) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n(n+1)+(2n+1)+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2) = \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

6

【解答】 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

【解説】

この数列の第 k 項は $k(n+(k-1) \cdot (-1)) = -k^2+(n+1)k$

したがって, 求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \{-k^2+(n+1)k\} = -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{-2(n+1)+3(n+1)\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

【別解】 求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+\dots+n) \\ &= \sum_{k=1}^n (1+2+\dots+k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2+k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

1

【解答】 (1) $3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2) $2^3+2^4+2^5+2^6$ (3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n+1}$

【解説】

(1) $\sum_{k=1}^{10} 3k = 3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2) $\sum_{k=2}^5 2^{k+1} = 2^3+2^4+2^5+2^6$

(3) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n+1}$

2

【解答】 (1) $\sum_{k=1}^n (3k-2)$ (2) $\sum_{k=1}^n 3^{k-1}$

【解説】

(1) 第 k 項は $3k-2$ であるから $\sum_{k=1}^n (3k-2)$

(2) 第 k 項は 3^{k-1} であるから $\sum_{k=1}^n 3^{k-1}$

3

【解答】 (1) $n(n-6)$ (2) $\frac{1}{6}n(10n^2+3n+5)$ (3) $n(n^3+2n^2+n-1)$

(4) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ (5) $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$ (6) $\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n-3)$

(7) $(n-1)(2n+7)$

【解説】

(1) $\sum_{k=1}^n (2k-7) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 7 = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 7n$
 $= n(n+1) - 7n = n(n-6)$

(2) $\sum_{k=1}^n (5k^2-4k+2) = 5 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2$
 $= 5 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n$
 $= \frac{1}{6}n[5(n+1)(2n+1) - 12(n+1) + 12] = \frac{1}{6}n(10n^2+3n+5)$

(3) $\sum_{k=1}^n (4k^3-1) = 4 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 - n$
 $= n[n(n+1)^2-1] = n(n^3+2n^2+n-1)$

(4) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2+k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$
 $= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(5) $\sum_{i=1}^n (3i-1)^2 = \sum_{i=1}^n (9i^2-6i+1) = 9 \sum_{i=1}^n i^2 - 6 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$
 $= 9 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$
 $= \frac{1}{2}n[3(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 2] = \frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$

(6) $\sum_{k=1}^n (3^k + 2) = \sum_{k=1}^n 3^k + \sum_{k=1}^n 2 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} + 2n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 4n - 3)$

(7) $\sum_{k=1}^{n-1} (4k + 7) = 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 7 = 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 7(n-1) = (n-1)(2n+7)$

4

【解答】 (1) $\frac{1}{3}n(4n^2 + 12n + 11)$ (2) $\frac{1}{3}n(n+1)(5n-2)$ (3) $\frac{1}{3}n(8n^2 + 3n - 2)$

【解説】

数列の第 k 項を a_k とする。

(1) 各項は 3 から始まる奇数の平方であるから $a_k = (2k+1)^2$

よって、初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k+1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 + 4k + 1) = 4 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3}n[2(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 3] = \frac{1}{3}n(4n^2 + 12n + 11) \end{aligned}$$

(2) 数列 2, 7, 12, 17, …… は、初項 2, 公差 5 の等差数列であるから、その第 k 項は $2 + (k-1) \cdot 5 = 5k - 3$

ゆえに $a_k = k(5k - 3)$

よって、初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n k(5k - 3) = \sum_{k=1}^n (5k^2 - 3k) = 5 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k \\ &= 5 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(5(2n+1) - 9) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(10n - 4) = \frac{1}{3}n(n+1)(5n - 2) \end{aligned}$$

(3) 数列 3, 7, 11, 15, …… は、初項 3, 公差 4 の等差数列であるから、その第 k 項は $3 + (k-1) \cdot 4 = 4k - 1$

ゆえに $a_k = (2k-1)(4k-1)$

よって、初項から第 n 項までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k-1)(4k-1) = \sum_{k=1}^n (8k^2 - 6k + 1) = 8 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 8 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3}n[4(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 3] = \frac{1}{3}n(8n^2 + 3n - 2) \end{aligned}$$

5

【解答】 (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ (2) $\frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)$ (3) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)$

【解説】

(1) この数列の第 k 項 a_k は、初項 1, 公差 4, 項数 k の等差数列の和で表されるから

$$a_k = \frac{1}{2}k[2 \cdot 1 + (k-1) \cdot 4] = k(2k-1)$$

よって、求める和は

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) = 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2(2n+1) - 3) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

(2) この数列の第 k 項 a_k は、初項 1, 公比 3, 項数 k の等比数列の和で表されるから

$$a_k = \frac{1(3^k - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^k - 1)$$

よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(3^k - 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (3^k - 1) = \frac{1}{2} \left[\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n \right] \\ &= \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3) \end{aligned}$$

(3) 第 k 項は、一般項 $(2m-1)^2$ の第 k 項までの和であるから

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k (4m^2 - 4m + 1) &= 4 \sum_{m=1}^k m^2 - 4 \sum_{m=1}^k m + \sum_{m=1}^k 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) - 4 \cdot \frac{1}{2}k(k+1) + k \\ &= \frac{1}{3}k(4k^2 - 1) = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) \end{aligned}$$

よって 求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3}k(4k^2 - 1) &= \frac{4}{3} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n^2 + 2n - 1) \end{aligned}$$

6

【解答】 (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$ (2) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

【解説】

(1) この数列の第 k 項 a_k ($k \leq n$) は $a_k = k(n+k) = k^2 + nk$

よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 + nk) = \sum_{k=1}^n k^2 + n \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3n = \frac{1}{6}n(n+1)(5n+1) \end{aligned}$$

(2) この数列の第 k 項 a_k ($k \leq n$) は $a_k = k^2(n - (k-1)) = -k^3 + (n+1)k^2$

よって、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{-k^3 + (n+1)k^2\} = - \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= - \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 + (n+1) \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)^2(-3n + 2(2n+1)) = \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2) \end{aligned}$$

1

【解答】 7

【解説】

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{2m} (2k+1) &= \sum_{k=1}^{2m} (2k+1) - \sum_{k=1}^m (2k+1) \\ &= 2m(2m+1) + 2m - (m(m+1) + m) \\ &= 3m^2 + 2m \end{aligned}$$

ゆえに、与式は $3m^2 + 2m > 133$ すなわち $3m^2 + 2m - 133 > 0$

よって $(m+7)(3m-19) > 0$

m は自然数であるから $m+7 > 0$ ゆえに $3m-19 > 0$ すなわち $m > \frac{19}{3}$

よって、求める最小の自然数 m は 7

2

【解答】 (1) $n(n+1)$ (2) $3 \cdot 2^{n+1} - 3n - 6$

【解説】

(1) $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k 2 \right) = \sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k 3 \cdot 2^{i-1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{3(2^k - 1)}{2 - 1} = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 2^k - 3) = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k - \sum_{k=1}^n 3$
 $= \sum_{k=1}^n 6 \cdot 2^{k-1} - 3 \sum_{k=1}^n 1 = \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3n - 6$

3

【解答】 $\frac{10^{n+1}}{27} - \frac{1}{3}n - \frac{10}{27}$

【解説】

第 k 項は 3 が k 個並ぶから、その値は

$$3 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \dots + 3 \cdot 10^{k-2} + 3 \cdot 10^{k-1} = \frac{3(10^k - 1)}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{3}$$

よって、求める和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{10^k - 1}{3} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \frac{10^{n+1}}{27} - \frac{1}{3}n - \frac{10}{27}$$

1

【解答】 (1) $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ (2) $\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

【解説】

(1) 求める和を S とすると

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

(2) 求める和を T とすると

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2+2(S+T)$$

$$\text{すなわち } \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2(S+T)$$

したがって、(1)より

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \right\}$$

$$= \frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

2

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$

【解説】

(1) $S = \sum_{k=1}^n k$ とおくと

$$S = 1+2+3+\cdots+n$$

$$S = n+(n-1)+\cdots+1$$

$$\text{辺々を加えると } 2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ 個}}$$

$$\text{よって } 2S = n(n+1) \text{ すなわち } S = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\text{したがって } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^3 - k^3\}$$

$$= (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + \{n^3 - (n-1)^3\} + \{(n+1)^3 - n^3\}$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = (n+1)^3 - 1$$

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \text{ であるから、(1)の結果より}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left\{ \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) - 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ (n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\}$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3) $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\} = \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^4 - k^4\}$$

$$= (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \cdots + \{n^4 - (n-1)^4\} + \{(n+1)^4 - n^4\}$$

$$= (n+1)^4 - 1$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = (n+1)^4 - 1$$

(2)と同様にして、(1)、(2)の結果より

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ (n+1)^4 - 1 - 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\}$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4) $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^5 - k^5\}$$

$$= (2^5 - 1^5) + (3^5 - 2^5) + (4^5 - 3^5) + \cdots + \{n^5 - (n-1)^5\} + \{(n+1)^5 - n^5\}$$

$$= (n+1)^5 - 1$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) = (n+1)^5 - 1$$

(2)と同様にして、(1)～(3)の結果より

$$\sum_{k=1}^n k^4$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \sum_{k=1}^n (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - 10 \sum_{k=1}^n k^3 - 10 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ (n+1)^5 - 1 - 10 \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 10 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\}$$

$$= \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3 + 3n - 1)$$

1

【解答】 (1) $a_n = n^2 + 4n + 3$ (2) $a_n = 2^n + 3$

【解説】

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は、7, 9, 11, 13, …… であるから、初項7, 公差2の等差数列である。

$$\text{ゆえに } b_n = 7 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 5$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+5) = 8 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 5$$

$$= 8 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 5(n-1) = n^2 + 4n + 3$$

また、初項は $a_1 = 8$ であるから、上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により、一般項 a_n は $a_n = n^2 + 4n + 3$

(2) 数列 $\{b_n\}$ は、2, 4, 8, 16, …… であるから、初項2, 公比2の等比数列である。

$$\text{ゆえに } b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 5 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n + 3$$

また、初項は $a_1 = 5$ であるから、上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により、一般項 a_n は $a_n = 2^n + 3$

2

【解答】 $S = \frac{n}{3(4n+3)}$

【解説】

$$\text{第 } k \text{ 項は } \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right)$$

よって、求める和 S は

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) + \cdots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

3

【解答】 (1) $a_1 = 0$, $n \geq 2$ のとき $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ (2) $a_n = 2^{n-1}$

【解説】

(1) 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - 1) - \{(n-1)^3 - 1\}$$

$$= (n^3 - 1) - (n^3 - 3n^2 + 3n - 2)$$

$$= 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①で $n=1$ とすると $a_1 = 1$ となり、①は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって $a_1 = 0$, $n \geq 2$ のとき $a_n = 3n^2 - 3n + 1$

(2) 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①で $n=1$ とすると $a_1 = 1$ が得られるから、①は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = 2^{n-1}$

4

解答 $S_n = (2n-1)2^n + 1$

解説

$$S_n = 3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + \dots + (2n+1)2^{n-1}$$

$$2S_n = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \dots + (2n-1)2^{n-1} + (2n+1)2^n$$

辺々引くと $-S_n = 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 2^{n-1} - (2n+1)2^n$

$$= 1 + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - (2n+1)2^n$$

$$= -1 - (2n-1)2^n$$

ゆえに $S_n = (2n-1)2^n + 1$

5

解答 (1) $n^2 - n + 1$ (2) n^3 (3) 第17群の15番目

解説

(1) $n \geq 2$ のとき、第1群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって、第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right\} - 1 = n^2 - n + 1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2) (1)より、第 n 群は初項 $n^2 - n + 1$ 、公差2、項数 n の等差数列をなす。

よって、その総和は

$$\frac{1}{2}n[2 \cdot (n^2 - n + 1) + (n-1) \cdot 2] = n^3$$

(3) 301が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2 - n + 1 \leq 301 < (n+1)^2 - (n+1) + 1$$

よって $n(n-1) \leq 300 < (n+1)n \dots \dots \textcircled{1}$

$n(n-1)$ 、 $(n+1)n$ は単調に増加し、 $17 \cdot 16 = 272$ 、 $18 \cdot 17 = 306$ であるから、

$\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は $n = 17$

301が第17群の m 番目であるとすると

$$(17^2 - 17 + 1) + (m-1) \cdot 2 = 301 \quad \text{これを解いて} \quad m = 15$$

したがって、301は第17群の15番目に並ぶ数である。

別解 (前半) $2k-1=301$ から $k=151$

よって、301はもとの数列において、151番目の奇数である。

301が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1) < 151 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに $n(n-1) < 302 \leq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は、上の解答と同様にして $n = 17$

6

解答 $(n+1)^2$

解説

2点 $(2n, 0)$ 、 $(0, n)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x + 2y = 2n$$

直線 $y = k$ ($k=0, 1, \dots, n$) と直線 ℓ の交点の座標は $(2n-2k, k)$ であるから、題意に適する格子点のうち、直線 $y = k$ 上にある点の個数は $2n-2k+1$ である。

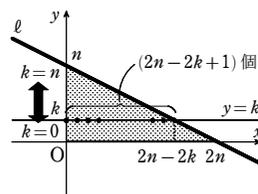
よって、求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^n (2n-2k+1) = \sum_{k=0}^n (2n-2k+1) + \sum_{k=1}^n (2n-2k+1)$$

$$= (2n+1) + (2n+1) \sum_{k=1}^n 1 - 2 \sum_{k=1}^n k$$

$$= (2n+1) + (2n+1)n - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= (n+1)^2$$



別解 直線 $x+2y=2n$ ($0 \leq y \leq n$) 上の格子点

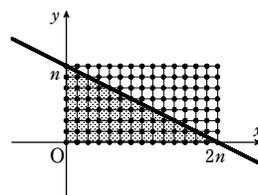
$(0, n)$ 、 $(2, n-1)$ 、 \dots 、 $(2n, 0)$ の個数は $n+1$

4点 $(0, 0)$ 、 $(2n, 0)$ 、 $(2n, n)$ 、 $(0, n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$$(n+1)(2n+1)$$

よって、求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(2n+1) - (n+1)\} + (n+1) = (n+1)^2$$



1

解答 (1) $3n^2 - n$ (2) $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 5)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし、その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) $\{a_n\} : 2, 10, 24, 44, 70, 102, 140, \dots$

$$\{b_n\} : 8, 14, 20, 26, 32, 38, \dots$$

数列 $\{b_n\}$ は、初項8、公差6の等差数列であるから $b_n = 8 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 2$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+2) = 2 + 6 \sum_{k=1}^{n-1} k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 2 + 6 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) = 3n^2 - n \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $3n^2 - n = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

初項は $a_1 = 2$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n = 3n^2 - n$

(2) $\{a_n\} : 3, 4, 7, 16, 43, 124, \dots$

$$\{b_n\} : 1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

数列 $\{b_n\}$ は、初項1、公比3の等比数列であるから $b_n = 3^{n-1}$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 3 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n + 5) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 5) = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3$

初項は $a_1 = 3$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{2}(3^n + 5)$

2

解答 (1) $S = \frac{n}{3n+1}$ (2) $S = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

解説

$$(1) \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

であるから

$$S = \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}$$

$$(2) \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって $S = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

3

【解答】 求める数列の一般項を a_n とする。

- (1) $a_n = -2n + 6$ (2) $a_1 = 3, n \geq 2$ のとき $a_n = 3n^2 - 3n + 1$
 (3) $a_1 = 5, n \geq 2$ のとき $a_n = 2^{n-1}$

【解説】

求める数列の一般項を a_n , 初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5n - n^2) - \{5(n-1) - (n-1)^2\}$$

$$= (-n^2 + 5n) - (-n^2 + 7n - 6) = -2n + 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 4$

① で $n=1$ とおくと $a_1 = 4$ となるから、① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって $a_n = -2n + 6$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 + 2) - \{(n-1)^3 + 2\} = (n^3 + 2) - (n^3 - 3n^2 + 3n + 1)$$

$$= 3n^2 - 3n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 3$

① で $n=1$ とおくと $a_1 = 1$ となるから、① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって $a_1 = 3, n \geq 2$ のとき $a_n = 3n^2 - 3n + 1$

(3) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n + 3) - (2^{n-1} + 3) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 5$

① で $n=1$ とおくと $a_1 = 1$ となるから、① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって $a_1 = 5, n \geq 2$ のとき $a_n = 2^{n-1}$

4

【解答】 $S = (n-1) \cdot 3^n + 1$

【解説】

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$3S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n$$

辺々を引くと

$$S - 3S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

よって $-2S = 1 + 2(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} - (2n-1) \cdot 3^n = -2(n-1) \cdot 3^n - 2$$

したがって $S = (n-1) \cdot 3^n + 1$

5

【解答】 (1) $\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$ (2) $\frac{1}{2}n(3n^2 - 1)$ (3) 第10群の5番目の数

【解説】

(1) もとの等差数列の第 n 項は $1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

$n \geq 2$ のとき、第1群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる数の総数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

よって、第 n 群 ($n \geq 2$) の最初の数は、もとの等差数列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\}$ 項である

から $3\left\{\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right\} - 2 = \frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって、求める数は $\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$

(2) 求める和は、初項 $\frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2)$ 、公差3、項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2 \cdot \frac{1}{2}(3n^2 - 3n + 2) + (n-1) \cdot 3\right\} = \frac{1}{2}n(3n^2 - 1)$$

(3) (1) で求めた数を a_n とする。

148 が第 n 群に含まれるとすると $a_n \leq 148 < a_{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

ここで $a_{10} = \frac{1}{2}(3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 2) = 136$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(3 \cdot 11^2 - 3 \cdot 11 + 2) = 166$$

であるから、① を満たす自然数 n は $n=10$

よって、148 は第10群に含まれる。

第10群に含まれる数を、小さい方から順に書き出すと

136, 139, 142, 145, 148, \cdots

したがって、148 は第10群の5番目の数である。

6

【解答】 $\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$

【解説】

2点 $(3n, 0)$, $(0, n)$ を通る直線 l の方程式は $x + 3y = 3n$

直線 $y = k$ ($k = 0, 1, \cdots, n$) と直線 l の交点の座標は $(3n - 3k, k)$ であるから、
 題意に適する格子点のうち、直線 $y = k$ 上にある点の個数は $3n - 3k + 1$ である。

よって、求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^n (3n - 3k + 1) = \sum_{k=0}^n (3n - 3k + 1) + \sum_{k=1}^n (3n - 3k + 1)$$

$$= (3n + 1) + (3n + 1) \sum_{k=1}^n 1 - 3 \sum_{k=1}^n k$$

$$= (3n + 1) + (3n + 1)n - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(n + 1)(3n + 2)$$

【別解】 直線 $x + 3y = 3n$ ($0 \leq y \leq n$) 上の格子点 $(0, n)$, $(3, n-1)$, \cdots , $(3n, 0)$ の
 個数は $n + 1$

4点 $(0, 0)$, $(3n, 0)$, $(3n, n)$, $(0, n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は
 $(n + 1)(3n + 1)$

よって、求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n + 1)(3n + 1) - (n + 1)\} + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(3n + 2)$$

1

【解答】 (ア) $-4n + 17$ (イ) 28 (ウ) 106

【解説】

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 13$

$n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} = -2n^2 + 15n - \{-2(n-1)^2 + 15(n-1)\}$
 $= -4n + 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

① で $n=1$ とすると $-4 \cdot 1 + 17 = 13$ であるから、① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって $a_n = -4n + 17$

$a_n > 0$ とすると $-4n + 17 > 0$ ゆえに $n < \frac{17}{4}$

n は自然数であるから $n \leq 4$

よって、 S_n は $n=4$ のとき最大値をとる。

その最大値は $S_4 = 128$

また $\sum_{n=1}^{10} |a_n| = \sum_{n=1}^4 a_n - \sum_{n=5}^{10} a_n = 2 \sum_{n=1}^4 a_n - \sum_{n=1}^{10} a_n$
 $= 2 \times 28 - (-50) = 106$

2

【解答】 $n(n+1)(n+2)$

【解説】

与えられた数列を $\{a_n\}$, その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また、数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$: 6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, \cdots

$\{b_n\}$: 18, 36, 60, 90, 126, 168, \cdots

$\{c_n\}$: 18, 24, 30, 36, 42, \cdots

数列 $\{c_n\}$ は、初項18、公差6の等差数列であるから

$$c_n = 18 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 12$$

$n \geq 2$ のとき $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 18 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 12)$

$$= 18 + 6 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 12(n-1) = 3n^2 + 9n + 6$$

この式に $n=1$ を代入すると、 $b_1 = 3 + 9 + 6 = 18$ となるから

$$b_n = 3n^2 + 9n + 6 \quad (n \geq 1)$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 6 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + 9k + 6)$$

$$= 6 + 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 9 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 6(n-1)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$$

この式に $n=1$ を代入すると、 $a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ となるから、 $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n = n(n+1)(n+2)$

3

【解答】 (1) $\frac{2n}{n+1}$ (2) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (3) $\frac{1}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2})$

【解説】

(1) この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k = \frac{1}{1+2+3+\dots+k} = \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

よって、求める和を S とすると

$$S = 2\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

(2) 第 k 項は $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

よって $S = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(3) 第 k 項は $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k} - \sqrt{k+2})} = \frac{1}{2}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$

よって $S = \frac{1}{2}\{(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\}$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2})$$

4

【解答】 (ア) 1 (イ) 1 (ウ) 1

【解説】

$\log_5 \frac{n+2}{n} = \log_5(n+2) - \log_5 n$ であるから

$$\sum_{n=1}^{10} \log_5 \frac{n+2}{n} = (\log_5 3 - \log_5 1) + (\log_5 4 - \log_5 2) + (\log_5 5 - \log_5 3) + \dots + (\log_5 11 - \log_5 9) + (\log_5 12 - \log_5 10)$$

$$= -\log_5 2 + \log_5 11 + \log_5 12$$

$$= -\log_5 2 + \log_5 11 + 2\log_5 2 + \log_5 3$$

$$= {}^{\circ}1 \cdot \log_5 2 + {}^{\circ}1 \cdot \log_5 3 + {}^{\circ}1 \cdot \log_5 11$$

5

【解答】 (1) $(n+1)^2$ 個 (2) $\frac{1}{6}(n+1)(4n^2 - n + 6)$ 個

【解説】

(1) 領域は、右図のように、 x 軸、 y 軸、直線

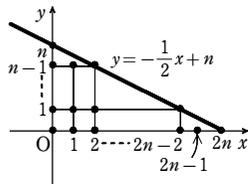
$$y = -\frac{1}{2}x + n$$

である。

直線 $y = k$ ($k = n, n-1, \dots, 0$) 上には、それぞれ $1, 3, 5, \dots, 2n+1$ 個の格子点が並ぶ。

よって、格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (2\cdot 0+1) + \sum_{k=1}^n (2k+1)$$



$$= 1 + \sum_{k=1}^n (2k+1) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= (n+1)^2 \text{ (個)}$$

【別解】 線分 $x+2y=2n$ ($0 \leq x \leq n$) 上の格子点 $(0, n), (2, n-1), \dots, (2n, 0)$ の個数は $n+1$

4点 $(0, 0), (2n, 0), (2n, n), (0, n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は $(2n+1)(n+1)$

ゆえに、求める格子点の個数を N とすると $2N - (n+1) = (2n+1)(n+1)$

$$\text{よって } N = \frac{1}{2}\{(2n+1)(n+1) + (n+1)\} = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)^2 \text{ (個)}$$

(2) 領域は、右図のように、 y 軸、直線 $y=n^2$ 、放物線

$y=x^2$ で囲まれた部分である (境界線を含む)。

直線 $x=k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1, n$) 上には、それぞれ $n^2+1, (n^2+1)-1, (n^2+1)-4,$

$(n^2+1)-9, \dots, (n^2+1)-n^2$ 個の格子点が並ぶ。

よって、格子点の総数は

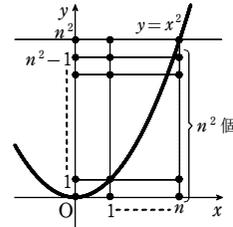
$$\sum_{k=0}^n (n^2+1-k^2)$$

$$= (n^2+1-0^2) + \sum_{k=1}^n (n^2+1-k^2)$$

$$= (n^2+1) + (n^2+1) \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= (n^2+1) + (n^2+1)n - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(4n^2 - n + 6) \text{ (個)}$$



1

【解答】 (1) $b_n = n$ (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

よって $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (2k-1)$

$$= \frac{1}{n} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \right\} = n$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとき、その初項を a 、公差を d とする。

このとき $a_n = a + (n-1)d = dn + a - d$

よって $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (dk + a - d)$

$$= \frac{1}{n} \left\{ d \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + (a-d)n \right\}$$

$$= \frac{d(n+1)}{2} + a - d$$

ゆえに $b_{n+1} - b_n = \left\{ \frac{d(n+2)}{2} + a - d \right\} - \left\{ \frac{d(n+1)}{2} + a - d \right\} = \frac{d}{2}$

$\frac{d}{2}$ は定数であるから、数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

(3) 数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとき、その初項を b 、公差を d' とする。

このとき $b_n = b + (n-1)d' = d'n + b - d'$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \text{ から } \sum_{k=1}^n a_k = nb_n = d'n^2 + (b-d')n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ から } \sum_{k=1}^{n-1} a_k = d'(n-1)^2 + (b-d')(n-1) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } a_n = d'(2n-1) + b - d' \quad \dots \textcircled{3}$$

ここで $a_1 = 1 \cdot b_1 = b$

また、 $\textcircled{3}$ において、 $n=1$ とすると

$$a_1 = d'(2 \cdot 1 - 1) + b - d' = b$$

ゆえに、 $n=1$ のときにも $\textcircled{3}$ は成り立つ。

よって $a_{n+1} - a_n = \{d'(2n+1) + b - d'\} - \{d'(2n-1) + b - d'\} = 2d'$

$2d'$ は定数であるから、数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

2

【解答】 $\frac{16200}{41}$

【解説】

分母が等しいものを群として、次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{3} \right| \frac{2}{3} \left| \frac{1}{4} \right| \frac{2}{4} \left| \frac{3}{4} \right| \frac{2}{5} \left| \frac{3}{5} \right| \frac{4}{5} \left| \frac{4}{6} \right| \frac{2}{6} \left| \dots \right|$$

第1群から第 n 群までの項数は $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

第800項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 800 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

$\frac{1}{2}(n-1)n, \frac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加し、 $\frac{39 \cdot 40}{2} = 780, \frac{40 \cdot 41}{2} = 820$ であるから

$$n = 40$$

第3講 レベルB

よって、第800項は第40群の $800-780=20$ (番号) の数である。

第 n 群に属するすべての数の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n}{2}$$

したがって、初項から第800項までの和は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[1+2+\cdots+(40-1)] + \frac{1}{41}(1+2+\cdots+20) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 40 + \frac{1}{41} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = \frac{10(39 \cdot 41 + 21)}{41} = \frac{16200}{41} \end{aligned}$$

3

解答 (1) 初めの数 8, 終わりの数 15 (2) 376 (3) 7

解説

(1) 第4群の初めの数は $1+2+2^2+1=8$

終わりの数は $1+2+2^2+2^3=15$

(2) 第5群の初めの数は $1+2+2^2+2^3+1=16$

よって、第5群は初項16, 公差1, 項数 $2^{5-1}=16$ の等差数列である。ゆえに、総和は

$$\frac{1}{2} \cdot 16(2 \cdot 16 + 16 - 1) = 376$$

(3) 第 n 群の初めの数は $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} + 1 = 2^{n-1}$

よって、第 n 群は初項 2^{n-1} , 公差1, 項数 2^{n-1} の等差数列である。ゆえに、総和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}(2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1) = 2^{n-2}(3 \cdot 2^{n-1} - 1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $\textcircled{1}$ は $n=7$ のとき 6112, $n=8$ のとき 24512

したがって、 $2^{n-2}(3 \cdot 2^{n-1} - 1) < 10000$ を満たす最大の n は $n=7$

4

解答 $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

解説

$$\log_2 \frac{y}{x} \leq x \text{ から } y \leq x \cdot 2^x$$

よって、 $x=k$ ($k=1, 2, \dots, n$) のとき、適する y の値は $y=1, 2, \dots, k \cdot 2^k$ の $k \cdot 2^k$ 個。

$x \leq n$ であるから、求める格子点の個数を S_n とすると $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$

$$\text{一方 } 2S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k+1} = n \cdot 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^{k+1} = n \cdot 2^{n+1} + \sum_{k=1}^n (k-1) \cdot 2^k$$

$$\text{ゆえに } S_n = 2S_n - S_n = n \cdot 2^{n+1} - \sum_{k=1}^n 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

第4講 例題

1

解答 (1) $a_n = 4n - 2$ (2) $a_n = -3(-2)^{n-1}$

解説

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項2, 公差4の等差数列であるから、一般項は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項-3, 公比-2の等比数列であるから、一般項は

$$a_n = -3(-2)^{n-1}$$

2

解答 (1) $a_n = \frac{1}{2}(2n^3 - 3n^2 + n + 8)$ (2) $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

解説

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項が4, 階差数列の第 n 項が $3n^2$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k^2 = 4 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) \\ &= \frac{1}{2}(2n^3 - 3n^2 + n + 8) \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

初項は $a_1=4$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{2}(2n^3 - 3n^2 + n + 8)$

(2) 漸化式から $a_{n+1} - a_n = 4^n$

よって、数列 $\{a_n\}$ は初項が1, 階差数列の第 n 項が 4^n であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 1 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{1}{3}(4^n - 1) \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

初項は $a_1=1$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

3

解答 (1) $a_n = 3^{n-1} + 1$ (2) $a_n = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$

解説

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 2$ を変形すると $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

$b_n = a_n - 1$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n$, $b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項1, 公比3の等比数列で $b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$a_n = b_n + 1$ であるから $a_n = 3^{n-1} + 1$

(2) $3a_{n+1} + 2a_n + 15 = 0$ から $a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n - 5$

これを变形すると $a_{n+1} + 3 = -\frac{2}{3}(a_n + 3)$

$b_n = a_n + 3$ とおくと $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n$, $b_1 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項5, 公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列で $b_n = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_n = b_n - 3$ であるから $a_n = 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3$

4

解答 $a_n = \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1} - 4}$

解説

$a_1 = 2 > 0$, および漸化式の形から、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ となる。

両辺の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 3}{a_n}$ すなわち $\frac{1}{a_{n+1}} = 4 + \frac{3}{a_n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n + 4$

$b_{n+1} = 3b_n + 4$ を変形して $b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$

数列 $\{b_n + 2\}$ は、初項 $b_1 + 2 = \frac{1}{a_1} + 2 = \frac{5}{2}$, 公比3の等比数列であるから

$$b_n + 2 = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}$$

ゆえに、 $b_n = \frac{5 \cdot 3^{n-1} - 4}{2}$ となり $a_n = \frac{2}{5 \cdot 3^{n-1} - 4}$

5

解答 $a_n = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$

解説

$a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + 1$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 1$ これを变形すると $b_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(b_n - 3)$

また $b_1 - 3 = \frac{a_1}{3} - 3 = \frac{3}{3} - 3 = -2$

よって、数列 $\{b_n - 3\}$ は初項-2, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列で

$$b_n - 3 = -2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{3^n} = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって $a_n = 3^n \left\{ 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$

6

解答 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$

解説

$a_{n+2} - a_{n+1} = [3a_{n+1} + 4(n+1)] - (3a_n + 4n) = 3(a_{n+1} - a_n) + 4$

よって $a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n + 4$

変形すると $b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$

$$b_1 + 2 = a_2 - a_1 + 2 = 3a_1 + 4 - a_1 + 2 = 2a_1 + 6 = 8$$

よって、数列 $\{b_n + 2\}$ は、初項8, 公比3の等比数列である。

ゆえに $b_n + 2 = 8 \cdot 3^{n-1}$ したがって $b_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8 \cdot 3^{k-1} - 2) = 1 + \frac{8(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - 2(n-1) \\ &= 1 + 4 \cdot 3^{n-1} - 4 - 2n + 2 = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1 \end{aligned}$$

この式で $n=1$ とすると、 $a_1=1$ となり、 $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$

第4講 例題演習

1

解答 (1) $a_n = 6n - 5$ (2) $a_n = 3(-5)^{n-1}$

解説

- (1) 初項 1, 公差 6 の等差数列であるから
 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 5$
 (2) 初項 3, 公比 -5 の等比数列であるから
 $a_n = 3(-5)^{n-1}$

2

解答 (1) $a_n = \frac{1}{3}[7 - (-2)^n]$ (2) $a_n = 2n^2 + n - 1$

解説

- (1) 漸化式から $a_{n+1} - a_n = (-2)^n$
 よって, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $(-2)^n$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^k = 3 + \frac{-2[1 - (-2)^{n-1}]}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{9 - 2 - (-2)^n}{3} = \frac{1}{3}[7 - (-2)^n]$$

初項は $a_1 = 3$ であるから, この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{1}{3}[7 - (-2)^n]$

- (2) 漸化式から $a_{n+1} - a_n = 4n + 3$
 よって, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $4n + 3$ であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 3) = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + 3(n-1)$$

$$= 2n^2 + n - 1$$

初項は $a_1 = 2$ であるから, この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = 2n^2 + n - 1$

3

解答 (1) $a_n = 3^{n-1} + 2$ (2) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$

解説

- (1) $\alpha = 3\alpha - 4$ を解いて $\alpha = 2$
 ゆえに, $a_{n+1} = 3a_n - 4$ は $a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ と変形できる。
 数列 $\{a_n - 2\}$ は, 初項 $a_1 - 2 = 1$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n - 2 = 1 \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 3^{n-1} + 2$$

- (2) $12a_{n+1} - 8a_n + 3 = 0$ から $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{4}$

$\alpha = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{4}$ を解いて $\alpha = -\frac{3}{4}$

ゆえに, $12a_{n+1} - 8a_n + 3 = 0$ は $a_{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{3}{4}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n + \frac{3}{4}\right\}$ は, 初項 $a_1 + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

4

解答 $a_n = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1} - 1}$

解説

$a_1 = 1 > 0$ より, 漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n > 0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 4}{a_n}$ よって $\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{4}{a_n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 3 + 4b_n$

変形すると $b_{n+1} + 1 = 4(b_n + 1)$

よって, 数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 4 の等比数列で, 初項は

$$b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

ゆえに $b_{n+1} + 1 = 2 \cdot 4^{n-1}$ よって $b_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1$

したがって $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1} - 1}$

注意 $2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot (2^2)^{n-1} = 2^{1+2(n-1)} = 2^{2n-1}$ であるから, $a_n = \frac{1}{2^{2n-1} - 1}$ と答えても

よい。

5

解答 $a_n = 2^{2n-1} + 2^n$

解説

$a_{n+1} = 4a_n - 2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{2^n} - 1$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n - 1$

これを变形すると $b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$

また $b_1 - 1 = \frac{a_1}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1$

よって, 数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 1, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n - 1 = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{2^n} = 2^{n-1} + 1$$

したがって $a_n = 2^{2n-1} + 2^n$

6

解答 $a_n = 2^n - n$

解説

$$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

において, n の代わりに $n+1$ とおくと

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + (n+1) - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ から $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

また, $a_2 = 2a_1 + 1 - 1 = 2$ であるから $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$\textcircled{3}$ を变形すると $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

よって, 数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列で, 初項は $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

ゆえに $b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$ したがって $b_n = 2^n - 1$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n-1)$$

$$= 2^n - n$$

初項は $a_1 = 1$ であるから, この式は $n = 1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = 2^n - n$

別解 $b_n = 2^n - 1$ を求めた後は, 次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n = a_{n+1} - a_n$ から $a_{n+1} - a_n = 2^n - 1$

$a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ を代入して $(2a_n + n - 1) - a_n = 2^n - 1$

よって $a_n = 2^n - n$

参考 漸化式は $a_{n+1} + (n+1) = 2(a_n + n)$ と変形できる。

よって, 数列 $\{a_n + n\}$ は公比 2 の等比数列で, 初項は $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

ゆえに $a_n + n = 2 \cdot 2^{n-1}$ したがって $a_n = 2^n - n$

1

【解答】 (1) $a_n = 3^n - 2^n$ (2) $a_n = \frac{an}{2^{n-1}}$

【解説】

(1) $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$

よって $b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$

ここで $b_1 - 1 = \frac{a_1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

ゆえに、数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列となり

$b_n - 1 = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ すなわち $b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

したがって $a_n = 3^n b_n = 3^n \left\{ -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right\} = 3^n - 2^n$

(2) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a}{2^n}$ の両辺に 2^{n+1} を掛けると $2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 2a$

$2^n a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 2a$, $b_1 = 2a_1 = 2a$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $2a$ 、公差 $2a$ の等差数列となり

$b_n = 2a + (n-1) \cdot 2a = 2an$

したがって $a_n = \frac{b_n}{2^n} = \frac{2an}{2^n} = \frac{an}{2^{n-1}}$

2

【解答】 (1) $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$ (2) $a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_n$

(3) $a_n = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

【解説】

(1) $\triangle ABC \sim \triangle AA_1H_1$ から $AC : AH_1 = BC : A_1H_1$

よって $1 : (1-a_1) = \sqrt{3} : a_1$ よって $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に、 $\triangle ABC \sim \triangle A_1A_2H_2$ から $1 : (a_1 - a_2) = \sqrt{3} : a_2$

$a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ から $a_2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\triangle ABC \sim \triangle A_n A_{n+1} H_{n+1}$ から $1 : (a_n - a_{n+1}) = \sqrt{3} : a_{n+1}$

よって $a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_n$

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 、公比 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$a_n = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

1

【解答】 $n^2 - n$ (個)

【解説】

n 個の円で交点が a_n 個できるとき、条件を満たす円を1個追加すると、 n 個の円とおのおの2点で交わるから、交点が $2n$ 個増える。

ゆえに $a_{n+1} = a_n + 2n$ すなわち $a_{n+1} - a_n = 2n$ ($n \geq 2$)

よって、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 2k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k - 2 \cdot 1 \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 2 = n^2 - n \end{aligned}$$

$a_2 = 2$ であるから、この式は $n = 2$ のときにも成り立つ。

したがって、 n 個の円によって、交点は $(n^2 - n)$ 個できる。

2

【解答】 (1) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $b_n = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$ (3) $b_n = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

【解説】

(1) $\int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n) dt = \left[\frac{a_n}{2} t^2 + b_n t \right]_{c_n}^{x+c_n}$

$= \frac{a_n}{2} (x^2 + 2c_n x) + b_n x$

$= \frac{a_n}{2} x^2 + (a_n c_n + b_n) x$

よって $a_{n+1} x^2 + b_{n+1} x = \frac{a_n}{2} x^2 + (a_n c_n + b_n) x$

これが x についての恒等式であるから

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, $b_{n+1} = b_n + a_n c_n$ …… ①

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 5$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき、①から

$b_{n+1} = b_n + a_n c_n$

$= b_n + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$

$= b_n + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

よって、数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は $5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

$= 7 + 5 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$

$= 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$ …… ②

$n=1$ のとき $10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 - 3 = 7$

$b_1 = 7$ であるから、②は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $b_n = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$

(3) $c_n = n$ のとき、①から

$b_{n+1} = b_n + 5 \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$b_n = b_1 + 5 \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= 7 + 5 \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ …… ③

ここで、 $S = \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ ($n \geq 2$) とおくと

$S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けると

$\frac{1}{2}S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + (n-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

辺々を引くと

$\frac{1}{2}S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $\sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = S = 4 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

③に代入して

$b_n = 7 + 5 \left\{ 4 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ …… ④

$n=1$ のとき $27 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 7$

$b_1 = 7$ であるから、④は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $b_n = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$