

1

実数 a, b に対して、 $f(x) = a(x-b)^2$ とおく。ただし、 a は正とする。放物線 $y = f(x)$ が直線 $y = -4x + 4$ に接している。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ において、 $f(x)$ の最大値 $M(a)$ と、最小値 $m(a)$ を求めよ。
- (3) a が正の実数を動くとき、 $M(a)$ の最小値を求めよ。

2

a, b を自然数とする。

- (1) ab が 3 の倍数であるとき、 a または b は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき、 a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。
- (3) $a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき、 a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

3

空間内に 4 点 O, A, B, C があり、

$$OA = 3, OB = OC = 4, \angle BOC = \angle COA = \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

であるとする。3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH を下ろす。

- (1) $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ とし、 $\vec{OH} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表すとき、 r, s, t を求めよ。
- (2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき、長さの比 $CH : HD, AD : DB$ をそれぞれ求めよ。