5-4 極板が振動するコンデンサー

(1990年度　第2問)

図2のように向かいあった2枚の極板A，Bは平行板コンデンサーを作っている。質量 m の極板Aは質量の無視できるバネにつながり，絶縁体の床の上を摩擦なく運動できるとする。また極板Bは固定されている。バネの長さが自然長のときの2枚の極板間の距離を d，そのときの電気容量を C_0 とする。コンデンサーに電荷がない状態でAを自由振動させたときの角振動数は ω_0 であった。Aの変位を x であらわし，バネが自然長のとき $x=0$ とする。ただし，AからBへの方向を正とする。また，この問題では，常に x/d の絶対値は1に比べて十分小さいとする。スイッチを閉じることにより導体のバネを通して電圧 V_0 を両極板の間にかけることができるが，バネのインダクタンスは無視できるとする。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　バネが自然長で静止している状態で突然スイッチを閉じたところ，Aは単振動を始めた。Aの変位が x のときに極板Aに貯えられている電荷を $Q(x)$，コンデンサーの内部でAからBに向かう電界の強さを $E(x)$ とする。$Q(x)$ および $E(x)$ を x の関数としてあらわせ。

Ⅱ　Aに働く電気的な力の強さは x の関数であり，$\dfrac{1}{2}Q(x)E(x)$ とあらわされる。これを利用して設問Ⅰの単振動における振幅 a_1 と角振動数 ω_1 を求めよ。ただし，$|s|\ll 1$ なら $(1+s)^{\alpha}\doteqdot 1+\alpha s$ という近似式を利用せよ。

Ⅲ　振動しているAが，最も左に寄る直前，および左端から右へ動き始めた直後の2つの場合について，回路に流れる電流 i（図に示した矢印の向きを正とする）は正，負，ゼロのいずれか，理由を付して答えよ。また，図2に示したように回路のそばにコイルを置いたところ，コイルの両端に振動電圧があらわれた。Aが最も左に寄ったとき，コイルの両端に生ずる電圧（bを基準にしたaの電位）は正，負，ゼロのいずれであるか，理由を付して答えよ。

Ⅳ　次に，振動しているAが $x=0$ の位置にきたとき，急にスイッチを開いた。この時刻を $t=0$ とする。その後のAの単振動の振幅を a_2，角振動数を ω_2 とし，スイッチの両端にあらわれる電圧 $v(t)$（gを基準にしたhの電位）を時間の関数としてあらわせ。また，角振動数 ω_2 はいくらか。

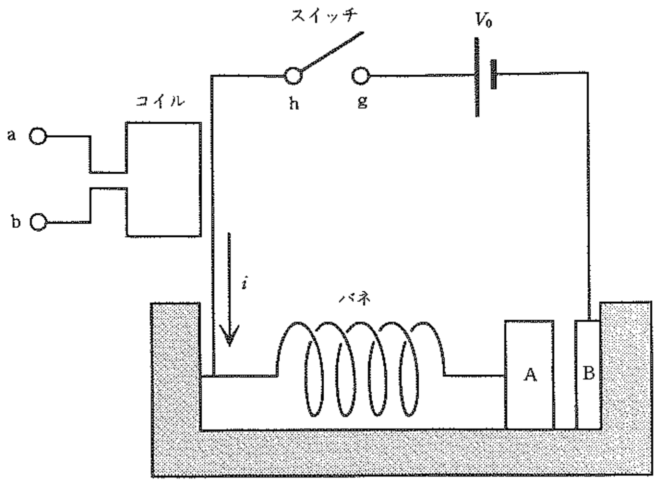


図　2

解 答

I．極板Aの変位がxのとき，AB間の距離は$d-x$である。このときのコンデンサーの電気容量を$C(x)$とすると，平行板コンデンサーの電気容量は極板間の距離に反比例するから

$$C(x)=\frac{d}{d-x}C_0$$

となる。したがって，極板Aの電荷は

$$Q(x)=C(x)\times V_0=\frac{d}{d-x}C_0V_0 \quad \cdots(答)$$

である。また，極板間の電界は一様と考えて

$$E(x)=\frac{V_0}{d-x} \quad \cdots(答)$$

II．バネのばね定数をkとする。コンデンサーに電荷がない状態で，極板Aの加速度をαとして，運動方程式をつくると

$$m\alpha=-kx \qquad \therefore\ \alpha=-\frac{k}{m}x$$

となるが，$\alpha=-\omega_0{}^2x$と表されるから

$$\frac{k}{m}=\omega_0{}^2 \qquad \therefore\ k=m\omega_0{}^2$$

である。

また，極板Aに働く電気的な引力の強さを$F(x)$とすると

$$F(x)=\frac{1}{2}Q(x)E(x)=\frac{dC_0V_0{}^2}{2(d-x)^2}=\frac{dC_0V_0{}^2}{2d^2\left(1-\frac{x}{d}\right)^2}=\frac{C_0V_0{}^2}{2d}\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-2}$$

であり，$\left|\frac{x}{d}\right|\ll 1$より与えられた近似式を利用すると

$$F(x)\fallingdotseq\frac{C_0V_0{}^2}{2d}\left(1+\frac{2}{d}x\right)$$

となる。

極板Aの運動方程式をつくると

$$m\alpha=-kx+F(x)=-m\omega_0{}^2x+\frac{C_0V_0{}^2}{2d}\left(1+\frac{2}{d}x\right)$$

$$=-\left(m\omega_0{}^2-\frac{C_0V_0{}^2}{d^2}\right)x+\frac{C_0V_0{}^2}{2d}$$

$$\therefore\ \alpha=-\left(\omega_0{}^2-\frac{C_0V_0{}^2}{md^2}\right)x+\frac{C_0V_0{}^2}{2md}$$

となり，単振動をすることがわかる。単振動の中心を$x=x_0$とすると，中心では

$\alpha=0$となるから

$$0=-\left(\omega_0{}^2-\frac{C_0V_0{}^2}{md^2}\right)x_0+\frac{C_0V_0{}^2}{2md}$$

$$\therefore\ x_0=\frac{\dfrac{C_0V_0{}^2}{2md}}{\omega_0{}^2-\dfrac{C_0V_0{}^2}{md^2}}=\frac{dC_0V_0{}^2}{2(md^2\omega_0{}^2-C_0V_0{}^2)}$$

である。最初の位置$x=0$で，極板Aは静止していたから，この位置が振動の左端になる。よって，単振動の振幅は

$$a_1=x_0-0=\frac{dC_0V_0{}^2}{2(md^2\omega_0{}^2-C_0V_0{}^2)} \quad \cdots(答)$$

である。また，角振動数は

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{C_0V_0{}^2}{md^2}} \quad \cdots(答)$$

III．Aが最も左に寄ったとき，xは最小で，極板Aの電荷$Q(x)$は最小になる。

(i)Aが最も左に寄る直前

Aから電荷が流れ出しているから，回路に流れる電流iは負。…(答)

(ii)Aが左端から右へ動き始めた直後

Aに電荷が流れ込むから，回路に流れる電流iは正。…(答)

また，Aが最も左に寄ったとき，iは負から正に増加中の状態であるから，コイルを垂直に貫く磁束は，紙面の裏から表に向かう状態から，表から裏に向かう状態に変化しつつある。この磁束の変化を妨げるため，コイルには反時計回りに誘導電流を流そうとする向きの起電力が生じる。

すなわち，コイルの両端に生ずる電圧（bを基準にしたaの電位）は正。…(答)

IV．$x=0$はAの単振動の左端であるから，以降の変位は

$$x=a_2-a_2\cos\omega_2t=a_2(1-\cos\omega_2t)$$

と表される。また，極板Aの電荷は

$$Q(0)=C_0V_0$$

で一定となるから，変位がxのときのBに対するAの電位を$V(x)$とすると

$$Q(0)=C(x)V(x)$$

$$\therefore\ V(x)=\frac{Q(0)}{C(x)}=\frac{C_0V_0}{\dfrac{d}{d-x}C_0}=\frac{d-x}{d}V_0$$

であり，スイッチの両端にあらわれる電圧（gを基準にしたhの電位）は

$$v(t)=V(x)-V_0=\frac{d-x}{d}V_0-V_0=-\frac{x}{d}V_0$$

$$\therefore\ v(t)=-\frac{a_2}{d}V_0(1-\cos\omega_2t) \quad \cdots(答)$$

となる。

また，極板間の電界は

$$E(x)=\frac{V(x)}{d-x}=\frac{V_0}{d}$$

であるから，極板Aの運動方程式をつくると

$$m\alpha=-kx+\frac{1}{2}Q(0)E(x)=-m\omega_0{}^2x+\frac{1}{2}C_0V_0\times\frac{V_0}{d}$$

$$\therefore\quad \alpha=-\omega_0{}^2x+\frac{C_0V_0{}^2}{2md}$$

となる。したがって，角振動数は

$$\omega_2=\boldsymbol{\omega_0}\quad\cdots(\text{答})$$

解 説

▶Ⅰ．平行板コンデンサーの向かい合う極板の面積を S，極板間の誘電率を ε とすると

$$C_0=\frac{\varepsilon S}{d}\qquad C(x)=\frac{\varepsilon S}{d-x}=\frac{d}{d-x}C_0$$

である。

▶Ⅱ．単振動の角振動数を ω，中心を x_C とすると，加速度 α は

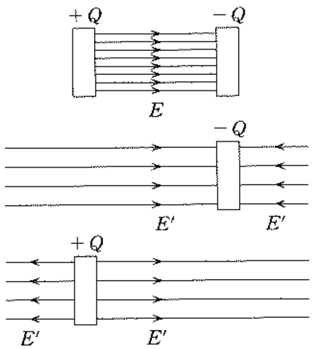
$$\alpha=-\omega^2(x-x_C)$$

と表される。物体の運動方程式をつくって，この形に変形できれば，その物体が単振動することや，角振動数，中心の位置がわかる（本問では求められていないが，周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ もわかる）。

単振動の中心では

$\alpha=0$　　作用する力の合力が0（力がつりあう）　　速さが最大

となり，これらを用いて中心を決めることができる。単振動の振幅は，中心と端の距離，あるいは，両端間の距離の半分として求められる。



電気量 Q を蓄えて，極板間の電界の強さが E の平行板コンデンサーの極板間の引力 F は，次のように求められる。右図のように，正負の各極板による電界の強さを E' とすると，極板上の電荷の面密度の関係から

$$E'=\frac{1}{2}E$$

と考えられる（逆に，正負の各極板による電界を合成すると，極板間では $2E'=E$，極板間の外では

$E'-E'=0$）。各極板上の電荷は，他の極板上の電荷が作る電界より力を受けるから

$$F=QE'=\frac{1}{2}QE$$

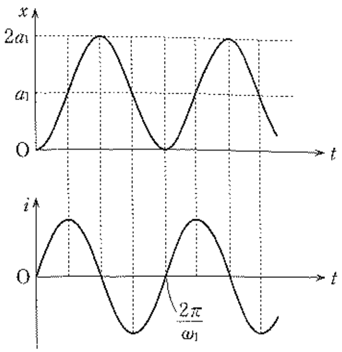
▶Ⅲ．Ⅰで求めた式 $Q(x)=\dfrac{d}{d-x}C_0V_0$ において，近似式を用い，さらに，$x=a_1(1-\cos\omega_1t)$ とすると

$$Q(x)=\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-1}C_0V_0\fallingdotseq\left(1+\frac{x}{d}\right)C_0V_0$$

$$\therefore\quad Q(x)=\left\{1+\frac{a_1(1-\cos\omega_1t)}{d}\right\}C_0V_0$$

となる。よって

$$i=\frac{dQ(x)}{dt}=\frac{C_0V_0a_1\omega_1}{d}\sin\omega_1t$$



であり，x-t グラフ，i-t グラフの関係は，右図のようになる。

▶Ⅳ．スイッチを開いて，極板の電荷が一定になると，極板間の電界が一様とみなせる範囲では，極板間の距離によらず電界の強さは変化しない。このため，電界から極板に作用する力は一定になり，振動の中心は $x=\dfrac{C_0V_0{}^2}{2md\omega_0{}^2}$ になるが，コンデンサーに電荷がない場合と同じ角振動数 ω_0 で振動する。