1

(解説)

辺 BC 上の点 P の座標は $(t,\ 2,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 3)$ とおける。

このとき　$\overrightarrow{DP}=(t,\ 2,\ -a)$

また　$\overrightarrow{OE}=(3,\ 0,\ a)$，$\overrightarrow{OG}=(0,\ 2,\ a)$

$\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{DP}$ より $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{DP}=0$ であるから

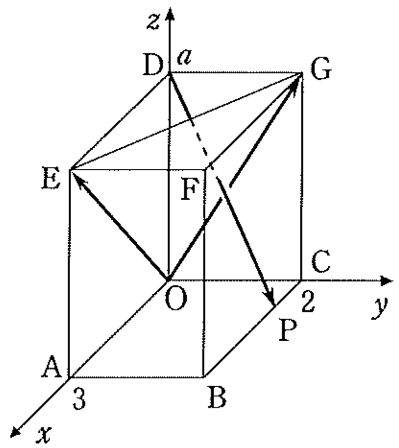
$$3t-a^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{DP}$ より $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{DP}=0$ であるから　$4-a^2=0$

a は正の数であるから　$a=2$

これと ① から　$t=\dfrac{4}{3}$　$(0 \leqq t \leqq 3$ に適する$)$

よって　$a=2$　P の座標は $\left(\dfrac{4}{3},\ 2,\ 0\right)$



2

(解説)

最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていて，失敗のたびに赤球が 1 個加えられるから，k 回目 $(k \geqq 1)$ に取り出すとき，袋の中には白球が 2 個，赤球が k 個入っている。その中から 2 球を取り出すとき，

成功する確率は　$\dfrac{1}{{}_{k+2}C_2}=\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$

失敗する確率は　$1-\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$

よって，求める確率は

$$\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\times\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\times\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\times\cdots\cdots\times\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\times\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{(n-1)!\times\dfrac{(n+2)!}{3!}}{n!\times\dfrac{(n+1)!}{2}}\times\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n+2}{n\times3}\times\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{3n(n+1)}$$

3

(解説)

共有点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とすると，点 P での 2 つのグラフの接線が一致するから

$$g(x)-f(x)=x^3-(ax^2+bx+c)=(x-p)^2(x-q) \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。

$$S=\left|\int_p^q (x-p)^2(x-q)dx\right|=\left|\int_p^q (x-p)^2\{(x-p)-(q-p)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_p^q \{(x-p)^3-(q-p)(x-p)^2\}dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}(x-p)^4-\frac{q-p}{3}(x-p)^3\right]_p^q\right|$$

$$=\frac{1}{12}(q-p)^4$$

ここで，① において $g(x)=x^3$ であるから

$$f(x)=x^3-(x-p)^2(x-q)=(2p+q)x^2-(2pq+p^2)x+p^2q$$

$$f'(x)=2(2p+q)x-2pq-p^2$$

また　$g'(x)=3x^2$

点 Q での 2 つのグラフの接線が直交するから　$f'(q)g'(q)=-1$

$g'(0)=0$ であるから　$q \neq 0$

よって　$\{2(2p+q)q-2pq-p^2\}\cdot3q^2=-1$

$$p^2-2pq-2q^2\cdot3q^2=1$$

$$\{(p-q)^2-3q^2\}\cdot3q^2=1$$

$$(p-q)^2=3q^2+\frac{1}{3q^2}$$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{12}\left(3q^2+\dfrac{1}{3q^2}\right)^2$

相加平均・相乗平均の大小関係により　$3q^2+\dfrac{1}{3q^2} \geqq 2\sqrt{3q^2\cdot\dfrac{1}{3q^2}}=2$

等号が成り立つのは，$3q^2=\dfrac{1}{3q^2}$ すなわち $q=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときである。

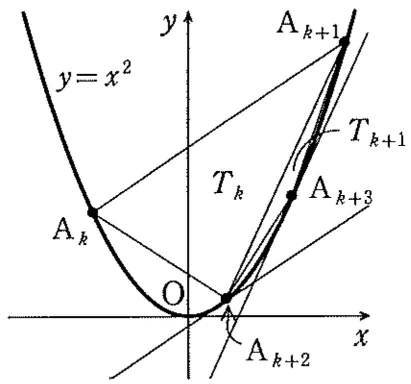
したがって，面積 S は $q=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{12}\cdot2^2=\dfrac{1}{3}$ をとる。

4

(解説)

(1) 直線 A_kA_{k+1} の傾きは

$$\frac{a_{k+1}^2-a_k^2}{a_{k+1}-a_k}=a_{k+1}+a_k$$



また，$y=x^2$ から　$y'=2x$

点 A_{k+2} における C の接線と直線 A_kA_{k+1} が平行であるから

$$2a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$$

よって　$a_{k+2}=\dfrac{1}{2}(a_{k+1}+a_k)$　……①

$$\overrightarrow{A_{k+2}A_k}=(a_k-a_{k+2},\quad a_k^2-a_{k+2}^2),$$

$$\overrightarrow{A_{k+2}A_{k+1}}=(a_{k+1}-a_{k+2},\quad a_{k+1}^2-a_{k+2}^2)$$

から

$$T_k=\frac{1}{2}|(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}^2-a_{k+2}^2)-(a_{k+1}-a_{k+2})(a_k^2-a_{k+2}^2)|$$

$$=\frac{1}{2}|(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}+a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})-(a_{k+1}-a_{k+2})(a_k+a_{k+2})(a_k-a_{k+2})|$$

$$=\frac{1}{2}|(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})(a_{k+1}-a_k)|$$

ここで，① を代入すると

$$T_k=\frac{1}{2}\left|\left(a_k-\frac{a_{k+1}+a_k}{2}\right)\left(a_{k+1}-\frac{a_{k+1}+a_k}{2}\right)\times(a_{k+1}-a_k)\right|$$

$$=\frac{1}{8}|a_{k+1}-a_k|^3$$

したがって

$$T_{k+1}=\frac{1}{8}|a_{k+2}-a_{k+1}|^3=\frac{1}{8}\left|\frac{a_{k+1}+a_k}{2}-a_{k+1}\right|^3=\frac{1}{64}|a_{k+1}-a_k|^3$$

よって　$\dfrac{T_{k+1}}{T_k}=\dfrac{1}{8}$

(2) 直線 A_1A_2 の方程式は　$y=(a_1+a_2)x-a_1a_2$

$a_1<a_2$ から　$S=\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}\{(a_1+a_2)x-a_1a_2-x^2\}dx=\int_{a_1}^{a_2}\{-(x-a_1)(x-a_2)\}dx$

$$=\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3$$

よって　$T_1=\dfrac{1}{8}|a_2-a_1|^3=\dfrac{1}{8}(a_2-a_1)^3=\dfrac{3}{4}S$

(1) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k$ は，初項 $T_1=\dfrac{3}{4}S$，公比 $\dfrac{1}{8}$ の無限等比級数の和であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{\frac{3}{4}S}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}S$$