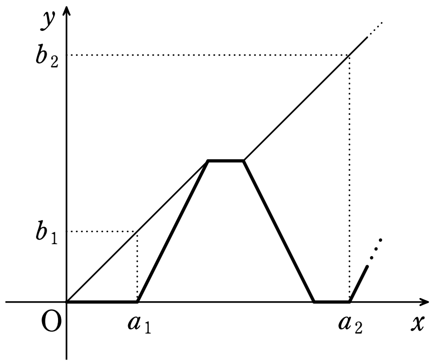
$\boxed{1}$

以下のように，歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて，数学的に考えてみよう。

自宅を原点とする数直線を考え，歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき，その点は位置 y にあるということにする。また，歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点を時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し，正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し，毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと，歩行者と自転車はともに 1 分だけ停止する。その後，歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し，自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると，1 分だけ停止した後，再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し，自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

$x=a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし，$y=b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

(1)　花子さんと太郎さんは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めるために，歩行者と自転車について，時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 $(x,\ y)$ で表すことにした。



$a_1=2$，$b_1=2$ により，自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2,\ 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2,\ 2)$ である。また，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は

$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}}\right)$ である。よって

$$a_2=\boxed{\text{イ}},\quad b_2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

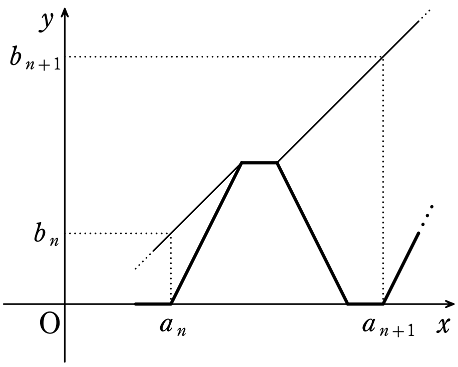
花子：数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項について考える前に，$(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{ア}})$ の求め方について整理してみようか。

太郎：花子さんはどうやって求めたの？

花子：自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が 1 分間に 1 ずつ縮まっていくことを利用したよ。

太郎：歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して，交点を計算して求めることもできるね。

自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n, 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は (a_n, b_n) である。よって，n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は，a_n，b_n を用いて，$(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ と表せる。



$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ a_n	① b_n	② $2a_n$
③ a_n+b_n	④ $2b_n$	⑤ $3a_n$
⑥ $2a_n+b_n$	⑦ a_n+2b_n	⑧ $3b_n$

以上から，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，自然数 n に対して，関係式

$$a_{n+1}=a_n+\boxed{\text{カ}}\,b_n+\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1}=3b_n+\boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。まず，$b_1=2$ と ② から

$$b_n=\boxed{\text{ケ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を得る。この結果と，$a_1=2$ および ① から

$$a_n=\boxed{\text{コ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

がわかる。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $3^{n-1}+1$	① $\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}$
② $3^{n-1}+n$	③ $\frac{1}{2}\cdot 3^n+n-\frac{1}{2}$
④ $3^{n-1}+n^2$	⑤ $\frac{1}{2}\cdot 3^n+n^2-\frac{1}{2}$
⑥ $2\cdot 3^{n-1}$	⑦ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}$
⑧ $2\cdot 3^{n-1}+n-1$	⑨ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{3}{2}$
ⓐ $2\cdot 3^{n-1}+n^2-1$	ⓑ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n^2-\frac{3}{2}$

(2)　歩行者が $y=300$ の位置に到着するときまでに，自転車が歩行者に追いつく回数は $\boxed{\text{サ}}$ 回である。また，$\boxed{\text{サ}}$ 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は，$x=\boxed{\text{シスセ}}$ である。

$\boxed{2}$

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。t を $0<t<1$ を満たす実数とし，

線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする。また，直線 OP 上に点 Q をとる。

(1)　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せる。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直となるのは，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　kt	①　$(k-kt)$	②　$(kt+1)$
③　$(kt-1)$	④　$(k-kt+1)$	⑤　$(k-kt-1)$

以下，$t\fallingdotseq\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とし，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるとする。

(2)　$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であることにより，(1) の k は

$$k=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\,t-\boxed{\text{シ}}}\quad\cdots\cdots②$$

となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

・$0<t<\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$。

・$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}<t<1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
①　D_1 に含まれ，かつ E_2 に含まれる
②　D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
③　D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる

(3)　太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の関係について考えている。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，① と ② により，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる。

太郎：$t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ のときにも，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな。

花子：$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を t を用いて表して，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。

太郎：計算が大変そうだね。

花子：直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ。

太郎：$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CR}}&=\boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\\&=\boxed{\text{チ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{ツ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となる。

$t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

$\boxed{3}$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとする。$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。

(1) $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x，y を用いて表せ。

(2) θ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

正の実数 x，y が，方程式 $\dfrac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}$ …… $(*)$ を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x，y が $(*)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，

$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作 (＊) を $k=1$，……，$n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(＊) 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

$\boxed{6}$

xy 平面において，2 点 B$(-\sqrt{3},\ -1)$，C$(\sqrt{3},\ -1)$ に対し，点 A は次の条件 $(*)$ を満たすとする。

$(*)$ $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正。

(1) $\triangle$ABC の外心の座標を求めよ。

(2) 点 A が条件 $(*)$ を満たしながら動くとき，$\triangle$ABC の垂心の軌跡を求めよ。