高2理系数学総合S　確認テスト　後期第7講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　得点　　／　10

$\boxed{1}$ （(1) 4点　(2) 6点）

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$x=\sqrt{3}\,t^2-1$，$y=t^3-t$　$(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(2)　$y=\sqrt{4-x^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

高2理系数学総合S　確認テスト　後期第7講【解答】

$\boxed{1}$ （(1) 4点　(2) 6点）

解答　(1)　$4\sqrt{3}$　　(2)　$\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{1}$ （(1) 4点　(2) 6点）

(1)　$L=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2\sqrt{3}\,t)^2+(3t^2-1)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt$　　」2点

$=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2+1)dt=\Big[t^3+t\Big]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$　　」2点

(2)　$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ であるから　　$1+y'^2=1+\dfrac{x^2}{4-x^2}=\dfrac{4}{4-x^2}$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\sqrt{\dfrac{4}{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\geqq 0$ であるから

$L=\displaystyle\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$　　」2点

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{6}$

」2点

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって　$L=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=2\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$　　」2点