$\boxed{1}$

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

$\boxed{2}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，$\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{3}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=1,\ 3a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{4}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$，$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ $(n\geqq2)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

1から7までの数を1つずつ書いた7個の玉が，袋の中に入っている。袋から玉を1個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す。この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数となる確率を p_n とする。ただし，n は正の整数とする。

(1)　p_1 と p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

(3)　p_n を求めよ。

$\boxed{6}$

$a_1=3$，$(n+1)a_{n+1}={a_n}^2-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測して，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

$\boxed{7}$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$ で定めるとき

(1)　$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$ を満たす x，y の組を2組求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{8}$

1辺の長さ3の正三角形ABCの辺AB上の1点を P_1 とし，$AP_1=2$ とする。P_1 から辺BCへ垂線 P_1Q_1 を下ろし，Q_1 から辺CAへ垂線 Q_1R_1 を下ろし，R_1 から辺ABへ垂線 R_1P_2 を下ろす。P_2 から更に同じ操作を繰り返して Q_2，R_2，P_3，Q_3，R_3，…… とする。線分 AP_n の長さを求めよ。

$\boxed{9}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n\fallingdotseq3$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{10}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=9$，$a_{n+1}=6a_n-3^{n+1}$　　(2)　$a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$

$\boxed{11}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n{}^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{12}$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

$\boxed{13}$

n は自然数とする。2 数 x，y の和と積が整数ならば，x^n+y^n は整数であることを証明せよ。

$\boxed{14}$

n が自然数のとき，2^n と n^2+1 の大小を比較せよ。

$\boxed{1}$

解答　$(2n-3)\cdot 2^n+3$

$\boxed{2}$

解答　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$，極限は 0

$\boxed{3}$

解答　$a_n=\dfrac{3}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$，$\dfrac{3}{5}$

$\boxed{4}$

解答　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$p_1=\dfrac{1}{7}$，$p_2=\dfrac{13}{49}$　　(2)　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{2}{7}$　　(3)　$p_n=\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

$\boxed{6}$

解答　$a_n=n+2$，証明は略

$\boxed{7}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(2,\ 3),\ (-2,\ -1)$　　(2)　$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$，$b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

$\boxed{8}$

解答　$\mathrm{AP}_n=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}+1$

$\boxed{9}$

解答　(1)　略　　(2)　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{2}$，$a_n=3-\dfrac{2}{n}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$a_n=6^n+3^n$　　(2)　$a_n=3n-1$　　(3)　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{11}$

解答　$a_n=2^{2^{n-1}-1}$

$\boxed{12}$

解答　$a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

$\boxed{13}$

解答　略

$\boxed{14}$

解答　$n=1$　のとき　$2^n=n^2+1$

$n=2,\ 3,\ 4$ のとき　$2^n<n^2+1$

$n\geqq 5$　のとき　$2^n>n^2+1$

$\boxed{1}$

$$S=1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

この等式の両辺に 2 を掛けると

$$2S=\quad 1\cdot 2+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n$$

辺々引くと　$-S=1+2(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot 2^n$

よって　$-S=1+2\cdot\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot 2^n$

$=-(2n-3)\cdot 2^n-3$

したがって　$S=(2n-3)\cdot 2^n+3$

$\boxed{2}$

$a_1>0$ であるから　$a_2=\dfrac{a_1}{2+a_1}>0$

同様にして　$a_3>0$，$a_4>0$，……，$a_n>0$

したがって　$a_n\fallingdotseq 0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2+a_n}{a_n}$

すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

よって　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列で　$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$

よって　$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}-1}$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\boxed{3}$

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　……①

また　$a_{n+2}+\dfrac{2}{3}a_{n+1}=a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$

ゆえに　$a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n=a_2+\dfrac{2}{3}a_1=1$　……②

①，② より　$\dfrac{5}{3}a_n=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=\dfrac{3}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{3}{5}(1-0)=\dfrac{3}{5}$

$\boxed{\text{別解}}$ 与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと　$b_1=a_2-a_1=1$，$b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列で　$b_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{3}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{3}{5}$

$\boxed{4}$

［解答 1］ 漸化式を変形して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}\ (n\geqq 2)$

ゆえに　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}\ (n\geqq 3)$

これを繰り返して　$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

よって　$a_n=\dfrac{2\cdot 1}{(n+1)n}\cdot\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

［解答 2］ 漸化式の両辺に n を掛けると　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}\ (n\geqq 2)$

よって　$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=2\cdot 1\cdot a_1=1$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$　……①

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)}=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

5

(1) $p_1=\dfrac{1}{7}$

2個の数の和が4の倍数のとき，2個の数の組合せは(1，3)，(1，7)，(2，2)，(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，7)，(6，6)であるから　$p_2=\dfrac{3+5\times 2}{7^2}=\dfrac{13}{49}$

(2) 試行を$(n+1)$回繰り返して得られる$(n+1)$個の数の和が4の倍数となるのは，

[1] n回目までの試行で得られたn個の数の和が4の倍数で，$(n+1)$回目の試行で4の玉を取り出す

[2] n回目までの試行で得られたn個の数の和が4の倍数ではなく，$(n+1)$回目までに得られた$(n+1)$個の和が4の倍数となる

のいずれかであり，[1]，[2]は互いに排反である。

[2]の場合について，$(n+1)$回目の試行で取り出される玉について考える。

n個の数の和を4で割った余りが1のとき，$(n+1)$回目の試行で取り出されるのは3または7の玉，n個の数の和を4で割った余りが2のとき，$(n+1)$回目の試行で取り出されるのは2または6の玉，n個の数の和を4で割った余りが3のとき，$(n+1)$回目の試行で取り出されるのは1または5の玉である。

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{1}{7}+(1-p_n)\cdot\dfrac{2}{7}$

$$=-\frac{1}{7}p_n+\frac{2}{7}$$

(3) (2)から　$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{7}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$

(1)から　$p_1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{28}$

数列$\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$は初項$-\dfrac{3}{28}$，公比$-\dfrac{1}{7}$の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{4}=-\frac{3}{28}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$p_n=\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

6

$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$から　$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-1}{n+1}$

$a_1=3$から　$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=4$，　$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=5$，　$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=6$，……

よって，$a_n=n+2$　……①　と推測される。

この推測が正しいことを，数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$のとき

$a_1=3$であるから，①は成り立つ。

[2] $n=k$のとき，①が成り立つ，すなわち

$$a_k=k+2\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$のときを考えると，②から

$$a_{k+1}=\frac{a_k{}^2-1}{k+1}=\frac{(k+2)^2-1}{k+1}=\frac{k^2+4k+3}{k+1}=\frac{(k+1)(k+3)}{k+1}$$
$$=k+3=(k+1)+2$$

よって，$n=k+1$のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数nについて①は成り立つ。

したがって　$a_n=n+2$

7

(1) $a_{n+1}+xb_{n+1}=a_n+4b_n+x(a_n+b_n)$

$$=(1+x)a_n+(4+x)b_n$$

よって，$a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$とすると

$$(1+x)a_n+(4+x)b_n=ya_n+xyb_n$$

これがすべてのnについて成り立つための条件は　$1+x=y$，$4+x=xy$

これを解くと　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(-2,\ -1)$

(2) (1)から　$a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$，$a_1+2b_1=3$；

$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$，$a_1-2b_1=-1$

よって，数列$\{a_n+2b_n\}$は初項3，公比3の等比数列；

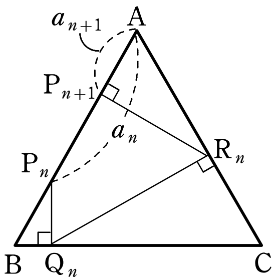
数列$\{a_n-2b_n\}$は初項-1，公比-1の等比数列。

ゆえに　$a_n+2b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$ …… ①，$a_n-2b_n=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$ …… ②

(①＋②)÷2 から　$a_n=\dfrac{3^n+(-1)^n}{2}$　　(①－②)÷4 から　$b_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

$\boxed{8}$

$\mathrm{AP}_n=a_n$ とおくと



$$\mathrm{BQ}_n=\frac{1}{2}\mathrm{BP}_n=\frac{1}{2}(3-\mathrm{AP}_n)=\frac{1}{2}(3-a_n)$$

$$\mathrm{CR}_n=\frac{1}{2}\mathrm{CQ}_n=\frac{1}{2}(3-\mathrm{BQ}_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{2}(3-a_n)\right\}=\frac{1}{4}(3+a_n)$$

$$\mathrm{AP}_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{AR}_n=\frac{1}{2}(3-\mathrm{CR}_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{3-\frac{1}{4}(3+a_n)\right\}=\frac{1}{8}(9-a_n)$$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{8}(9-a_n)$

これを変形すると　$a_{n+1}-1=-\dfrac{1}{8}(a_n-1)$

$a_1=\mathrm{AP}_1=2$ であるから　$a_1-1=2-1=1$

ゆえに，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列で

$$a_n-1=1\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

したがって　$a_n=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}+1$　　すなわち　$\mathrm{AP}_n=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}+1$

$\boxed{9}$

(1)　ある自然数 n について $a_{n+1}=3$ とすると，条件式から

$a_n-9=3(a_n-5)$　　ゆえに　$a_n=3$

よって　$a_{n+1}=a_n=a_{n-1}=\cdots\cdots=a_1=3$　　これは条件 $a_1=1$ に反する。

ゆえに，$a_{n+1}=3$ を満たす自然数 n はない。

また　$a_1\fallingdotseq 3$

したがって，すべての自然数 n に対して $a_n\fallingdotseq 3$ である。

(2)　$a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}-3$ から　$a_{n+1}-3=-\dfrac{2(a_n-3)}{a_n-5}$

(1) より $a_n\fallingdotseq 3$ であるから，両辺の逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n-5}{a_n-3}$　　よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n-3}$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{2}$　　また　$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\dfrac{1}{2}$，公差 $-\dfrac{1}{2}$ の等差数列で

$$b_n=-\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n}{2}$$

したがって　$a_n=3+\dfrac{1}{b_n}=3-\dfrac{2}{n}$

$\boxed{10}$

(1)　$a_{n+1}=6a_n-3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}-1$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1$

これを変形して　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1-1=\dfrac{a_1}{3}-1=\dfrac{9}{3}-1=2$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 2，公比 2 の等比数列で

$b_n-1=2\cdot2^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=2^n+1$

$a_n=3^n\cdot b_n$ であるから　$a_n=3^n(2^n+1)=6^n+3^n$

(2)　$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項が 2，階差数列の第 n 項が $\dfrac{1}{n(n+1)}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{3n-1}{n}\quad\cdots\cdots①$$

$b_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに　$b_n=\dfrac{3n-1}{n}$

$a_n=nb_n$ であるから　$a_n=n\cdot\dfrac{3n-1}{n}=3n-1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+4n$ ……① とすると　$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$ ……②

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

これを変形すると　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

また，① から　$a_2=3a_1+4\cdot1=3\cdot1+4=7$

$b_1=a_2-a_1=7-1=6$

よって　$b_1+2=8$

ゆえに，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 8，公比 3 の等比数列で

$b_n+2=8\cdot3^{n-1}$　　よって　$b_n=8\cdot3^{n-1}-2$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$
$$=4\cdot3^{n-1}-2n-1\quad\cdots\cdots③$$

初項は $a_1=1$ であるから，③ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

別解　$b_n=8\cdot3^{n-1}-2$ を求めた後は，次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n=8\cdot3^{n-1}-2$ から　$a_{n+1}-a_n=8\cdot3^{n-1}-2$

これに $a_{n+1}=3a_n+4n$ を代入して　$(3a_n+4n)-a_n=8\cdot3^{n-1}-2$

よって　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

11

漸化式から，数列 $\{a_n\}$ の各項は正である。

よって，$a_{n+1}=2a_n{}^2$ の両辺は正であるから，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n{}^2$　　ゆえに　$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

これを変形して　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=\log_2 a_1+1=\log_2 1+1=1$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから　$b_n+1=2^{n-1}$

ゆえに　$b_n=2^{n-1}-1$　　したがって　$a_n=2^{b_n}=2^{2^{n-1}-1}$

12

$a_1=S_1$ であるから　$a_1=1-2a_1$　　ゆえに　$a_1=\dfrac{1}{3}$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから　$a_{n+1}=(n+1-2a_{n+1})-(n-2a_n)$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$

これを変形して　$a_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(a_n-1)$　　また　$a_1-1=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$a_n-1=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　したがって　$a_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

13

[1]　$n=1$ のとき，$x^1+y^1=x+y$ で整数である。

$n=2$ のとき，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ で整数である。

[2]　$n=k$，$k+1$ のとき，x^n+y^n が整数である，すなわち，x^k+y^k，$x^{k+1}+y^{k+1}$ はともに整数であると仮定する。

$n=k+2$ のときを考えると

$$x^{k+2}+y^{k+2}=(x^{k+1}+y^{k+1})(x+y)-xy(x^k+y^k)$$

$x+y$，xy は整数であるから，仮定により，$x^{k+2}+y^{k+2}$ も整数である。

よって，$n=k+2$ のときにも x^n+y^n は整数である。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について，x^n+y^n は整数である。

$\boxed{14}$

$n=1$，2，3，4，5，6 のとき，2^n と n^2+1 の値を計算すると，右の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	…
2^n	2	4	8	16	32	64	…
n^2+1	2	5	10	17	26	37	…

よって，$n\geqq5$ のとき

$$2^n>n^2+1 \quad \cdots\cdots ①$$

と推測される。

以下，この推測が正しいことを数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=5$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$k\geqq5$ として，$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$2^k>k^2+1 \quad \cdots\cdots ②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の両辺の差を考えると，② から

$$\begin{aligned}2^{k+1}-\{(k+1)^2+1\}&=2\cdot2^k-(k^2+2k+2)\\&>2(k^2+1)-(k^2+2k+2)\\&=k^2-2k=k(k-2)\end{aligned}$$

$k\geqq5$ であるから　　$k(k-2)>0$

すなわち　　$2^{k+1}>(k+1)^2+1$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，5 以上のすべての自然数 n について ① は成り立つ。

以上から　$n=1$ のとき　$2^n=n^2+1$

$n=2$，3，4 のとき　$2^n<n^2+1$

$n\geqq5$ のとき　$2^n>n^2+1$