$\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定める。

(1)　すべての自然数 n について $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定める。b_n の値を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$

a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$f(1)=0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

曲線 $C:y=\cos^3 x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする。

(1)　S を求めよ。

(2)　$f(t)$ は最大値をただ1つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると，

$f(\alpha)=\dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{9}{16}$ を示せ。

$\boxed{4}$

座標平面において，t を媒介変数として

$$x=e^t\cos t+e^{\pi},\quad y=e^t\sin t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。