
第 5 章

～指数関数・対数関数～

第1講 指数関数

1 指数の拡張

① 累乗根の性質

$a > 0, b > 0$ で, m, n は正の整数とする。

$$1 \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$2 \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3 \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4 \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

参考 負の数の n 乗根

n が正の奇数のとき, 実数としては1つ存在する。 n が正の偶数のとき, 実数の範囲では存在しない。例 $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3, \sqrt[5]{-3} = -\sqrt[5]{3}$

② 有理数の指数

$a > 0$ で, m, n が正の整数, r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a^0 = 1$$

③ 指数法則

$a > 0, b > 0$ で, r, s は有理数とする。

$$1 \quad a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$2 \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$3 \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$4 \quad (ab)^r = a^r b^r$$

2 指数関数

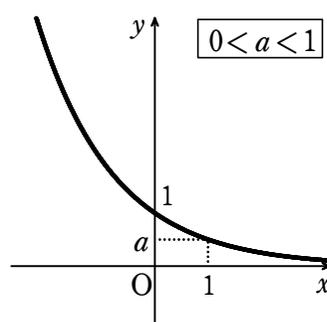
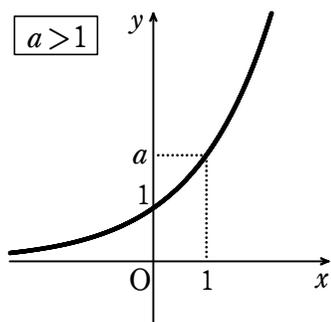
① 指数関数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) のグラフとその特徴

1 定義域は実数全体, 値域は正の数全体

2 $a > 1$ のとき増加関数 $r < s \iff a^r < a^s$

$0 < a < 1$ のとき減少関数 $r < s \iff a^r > a^s$

3 グラフは点 $(0, 1), (1, a)$ を通り, x 軸が漸近線



第1講 例題

1 ★☆☆

次の値を求めよ。

- (1) $(-3)^0$ (2) 10^{-1} (3) 7^{-2} (4) $(-6)^{-3}$
(5) $49^{\frac{1}{2}}$ (6) $8^{\frac{4}{3}}$ (7) $81^{-\frac{5}{4}}$

2 ★☆☆

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[5]{0.00001}$ (3) $(\sqrt[4]{5})^8$
(4) $\frac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}$ (5) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

3 ★★☆☆

次の計算をせよ。ただし、(3)は分母を有理化せよ。

- (1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{6}$ (2) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} \times \sqrt{8} \div \sqrt[3]{16}$ (3) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$
(4) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$ (5) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})^3$ (6) $\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-3}$

4 ★★★☆☆

(1) $a > 0$ とする。 $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = 4$ のとき、次の式の値を求めよ。

- ① $a + a^{-1}$ ② $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

(2) $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 3$ のとき、次の式の値を求めよ。

- ① $x + x^{-1}$ ② $x^3 + x^{-3}$

5 ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また、(2)~(5)のグラフは(1)のグラフとどんな位置関係にあるか。

- (1) $y = 4^x$ (2) $y = -4^x$ (3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
(4) $y = -4^{-x}$ (5) $y = 4 \cdot 4^x$

第1講 例題

6 ★☆☆

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{64}$ (2) $2^{30}, 3^{20}, 10^{10}$ (3) $\sqrt[3]{5}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{8}$

7 ★☆☆

次の方程式, 不等式を解け。

(1) $7^x = 49$ (2) $4^x = \frac{1}{64}$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$

(4) $5^x \geq 25$ (5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$ (6) $0.1^x < 1000$

(7) $5^{3x+1} = \frac{1}{125}$ (8) $4^{2x-1} = 2^{3x-5}$

(9) $2^{x-2} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (10) $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

8 ★★☆☆

次の方程式, 不等式を解け。

(1) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ (2) $4^x - 64 = 3 \cdot 2^{x+2}$

(3) $16^x - 3 \cdot 4^x - 4 < 0$ (4) $\frac{1}{4^x} \geq \frac{3}{2^x} - 2$

9 ★★☆☆

次の関数の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

$$y = 4^x - 2^{x+2} + 1 \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

10 ★★★★★

関数 $y = 4(4^x + 4^{-x}) - 34(2^x + 2^{-x}) + 81$ を考える。

- (1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき, y を t の式で表せ。
(2) y の最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

第1講 例題演習

1

次の式を計算せよ。

- (1) $9^{\frac{3}{2}}$ (2) $8^{-\frac{4}{3}}$ (3) $0.04^{1.5}$ (4) $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$
- (5) $6^{\frac{1}{2}} \times 36^{\frac{1}{4}}$ (6) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ (7) $(9^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2})^{\frac{3}{2}}$ (8) $\left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

2

次の式を計算せよ。

- (1) $\sqrt[3]{125}$ (2) $\sqrt[4]{81}$ (3) $\sqrt[3]{1000000}$ (4) $\sqrt[3]{0.001}$
- (5) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{54}$ (6) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ (7) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ (8) $\sqrt[6]{4^3}$

3

次の計算をせよ。

- (1) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$ (2) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} \times \sqrt[3]{-25} \div \sqrt[6]{5}$
- (3) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{512}$ (4) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}$
- (5) $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16})^3 \times \left\{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$ (6) $\sqrt[3]{54} + \frac{3}{2}\sqrt[6]{4} + \sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$

4

$a > 0$ とする。 $9^a + 9^{-a} = 14$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $3^a + 3^{-a}$ (2) $3^a - 3^{-a}$ (3) $27^a + 27^{-a}$ (4) $27^a - 27^{-a}$

5

(1) 次の関数のグラフをかけ。また、(2)~(4)のグラフは(1)のグラフとどんな位置関係にあるか。

- ① $y = 3^x$ ② $y = -3^x$ ③ $y = 3^{-x}$ ④ $y = 9 \cdot 3^x$

(2) 次の関数のグラフをかき、関数 $y = 2^x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

- ⑤ $y = 2^{x+1}$ ⑥ $y = 2^{-x+1}$ ⑦ $y = 4^{\frac{x}{2}} - 1$

第1講 例題演習

6

次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^3, 2^{-1}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^0$

(2) $0.7^2, 0.7^{-3}, 0.7^0, 0.7^{-1}$

(3) $\sqrt[5]{8}, \sqrt[6]{16}, \sqrt[8]{64}$

7

次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^{3x-2} = 128$

(2) $125^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-6}$

(3) $3^{x-2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

(4) $243^x < 3^{2x+3}$

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$

(6) $(0.2)^{2x-1} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

8

次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{2x} + 4^{x+1} - 12 = 0$

(2) $100^x + 10^x = 2$

(3) $9^x + 2 \cdot 3^x - 15 > 0$

(4) $\frac{1}{4^x} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$

9

次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$

(2) $y = -4^x + 2^x + 2 \quad (-1 \leq x \leq 2)$

10

関数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2^{3+x} - 2^{3-x} + 16$ の最小値を求めよ。

第1講 レベルA

1

次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ (2) $0.09^{1.5}$ (3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\sqrt{2} \div \sqrt[4]{4} \times \sqrt[12]{32} \div \sqrt[6]{2}$ (5) $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24} + \frac{4}{3}\sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-\frac{1}{9}}$

2 [千葉工業大]

(1) $a > 0, b > 0$ のとき、次の式を計算せよ。

(ア) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2})$

(イ) $(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{-\frac{1}{4}})$

(2) $2^x - 2^{-x} = 3$ のとき、 $2^{3x} - 2^{-3x}$ の値を求めよ。

3

次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $16^{2-x} = 8^x$

(2) $27^x - 4 \cdot 9^x + 3^{x+1} = 0$

(3)
$$\begin{cases} 3^{y-1} - 2^x = 19 \\ 4^x + 2^{x+1} - 3^y = -1 \end{cases}$$

4 [南山大]

実数 a に対して、 x についての方程式 $4^x + a \cdot 2^{x+2} + 3a + 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

5 [県立広島大]

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $4, \sqrt[3]{3^4}, 2^{\sqrt{3}}, 3^{\sqrt{2}}$

(2) $10^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{4}{7}}, 9^{\frac{1}{5}}$

第1講 レベルB

1 [近畿大]

$h(x) = 2(8^{x-1} + 8^{-x}) - 3(4^{x-1} + 4^{-x}) + 2^{x-1} + 2^{-x}$ とする。

方程式 $h(x) = 0$ は、 $t = 2^{x-1} + 2^{-x}$ とおくと、 t についての3次方程式

$$(2t - \boxed{\quad})(t + \boxed{\quad})(t - \boxed{\quad}) = 0 \text{ となる。}$$

したがって、 $h(x) = 0$ の解 x の値は小さい順に $x = \boxed{\quad}$, $x = \boxed{\quad}$ となる。

2 [東北大]

(1) 実数 x に関する連立不等式 $\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1 \end{cases}$ が解をもつような実数 a の範囲を

求めよ。

(2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し、不等式 $3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

3 [名城大]

$(n^2 - 3n + 3)^{n^2 - 8n + 15} = 1$ を満たす自然数 n のうち、最小なものとは最大なものを求めよ。

第2講 対数とその性質

3 対数とその性質

① 対数 $a > 0, a \neq 1$ で $M > 0$ とするとき、次のことが成り立つ。

$$M = a^p \iff \log_a M = p$$

とくに $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

② 対数の性質

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ で、 k は実数とする。

1 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ とくに $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

3 $\log_a M^k = k \log_a M$

③ 底の変換公式

a, b, c は正の数で、 $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ とするとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{とくに} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

4 対数関数

① 対数関数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) のグラフとその特徴

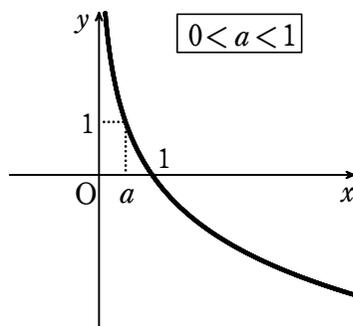
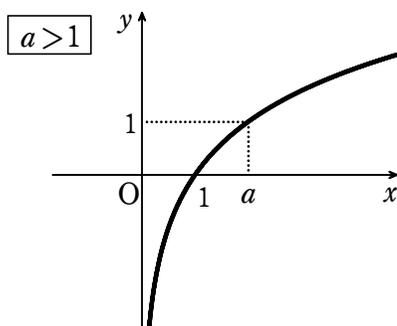
1 定義域は正の数全体、値域は実数全体

2 $a > 1$ のとき増加関数 $0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$ のとき減少関数 $0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$

3 グラフは点 $(1, 0), (a, 1)$ を通り、 y 軸が漸近線

4 直線 $y = x$ に関して、 $y = a^x$ のグラフと対称



第2講 例題

1 ★☆☆

次の値を求めよ。

- (1) $\log_4 64$ (2) $\log_3 81$ (3) $\log_5 5$ (4) $\log_7 1$
(5) $\log_3 \frac{1}{9}$ (6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}$ (7) $\log_{0.5} \sqrt{8}$ (8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$

2 ★★☆☆

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$ (2) $\log_6 42 - \log_6 7$
(3) $\log_3 54 + \log_3 6 - 2\log_3 2$ (4) $\log_{10} \frac{75}{13} - 2\log_{10} \frac{5}{9} + \log_{10} \frac{130}{243}$
(5) $\log_2 \sqrt[5]{72} - \frac{2}{5} \log_2 3$

3 ★★☆☆

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$ (2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$
(3) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8$ (4) $\log_2 10 \cdot \log_5 10 - (\log_2 5 + \log_5 2)$

4 ★★☆☆

$a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$, $c = \log_{10} 7$ とするとき、次の値を a , b , c で表せ。

- (1) $\log_{10} 16$ (2) $\log_{10} 5$ (3) $\log_{10} 2.1$ (4) $\log_{10} \sqrt[3]{24}$ (5) $\log_3 28$

5 ★★☆☆

次の式の値を求めよ。

- (1) $10^{\log_{10} 2}$ (2) $3^{-2\log_3 4}$ (3) $16^{\log_2 10}$

6 ★★☆☆

$xyz \neq 0$, $2^x = 3^y = 12^z$ のとき、 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ を証明せよ。

7 ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また、 $y = \log_3 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

- (1) $y = \log_3(x-1)$ (2) $y = \log_3 9x$ (3) $y = \log_3 \frac{1}{x}$

第2講 例題

8 ★☆☆

次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\log_3 8, \log_9 16, 2$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{4}} 5, -2$

第2講 例題演習

1

次の対数の値を求めよ。

- (1) $\log_3 9$ (2) $\log_2 \frac{1}{4}$ (3) $\log_{100} 1$ (4) $\log_2 \sqrt{8}$
(5) $\log_{\sqrt{3}} 3$ (6) $\log_{64} 4$ (7) $\log_{0.2} 25$ (8) $\log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}}$

2

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_8 2 + \log_8 32$ (2) $\log_3 45 - \log_3 5$
(3) $3\log_5 12 - \log_5 300 - 2\log_5 60$ (4) $\log_{0.5} \frac{8}{13} - 2\log_{0.5} \frac{2}{3} + \log_{0.5} \frac{26}{9}$
(5) $\log_2 \sqrt[3]{18} - \frac{2}{3}\log_2 3$ (6) $\log_5 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2}\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

3

次の式を簡単にせよ。

- (1) $\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25} \sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$
(2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$
(3) $(\log_5 3 + \log_{25} 9)(\log_9 5 - \log_3 25)$

4

$p = \log_a x$, $q = \log_a y$, $r = \log_a z$ であるとき、次の各式を p , q , r で表せ。

- (1) $\log_a x y z$ (2) $\log_a x^2 y^3 z^4$ (3) $\log_a \frac{x}{(yz)^2}$ (4) $\log_a \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

5

次の式の値を求めよ。ただし、 a , x は正の数とし、 $a \neq 1$ とする。

- (1) $5^{\log_5 7}$ (2) $10^{1+\log_{10} 3}$ (3) $36^{\log_6 \sqrt{5}}$ (4) $a^{2\log_a x}$ (5) $a^{-\log_a x}$

6

$3^x = 4^y = 6^z$ ($x \neq 0$) のとき、等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{z}$ を証明せよ。

第2講 例題演習

7

次の関数のグラフをかけ。また、関数 $y = \log_2 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1) $y = \log_2(x+1)$ (2) $y = \log_2(2x-4)$ (3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$

8

次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\log_2 0.5, \log_2 3, 1$ (2) $\log_{0.3} 0.5, 0, \log_{0.3} 2$
(3) $2\log_2 11, 3\log_2 5, 7$ (4) $2\log_{0.1} 3, \log_{0.1} \sqrt[3]{512}, -1$

第2講 レベルA

1

$\log_{16}(\sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}})$ の値を求めよ。

2 [星薬科大]

$2\log_3 441 - 9\log_3 \sqrt{7} - \frac{1}{6}\log_3 \frac{27}{343}$ を簡単にせよ。

3 [京都産業大]

$\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25} \sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$ を計算せよ。

4 [工学院大]

$\log_3\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_3\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_3\left(1 - \frac{1}{9}\right)$ の値を求めよ。

5

$\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$ とおくとき, $\log_{14} 56$ を a , b で表せ。

6 [北海道薬科大]

$x = \log_5 50 + \log_{25} 400 - 3$ のとき, $\sqrt[3]{5^x}$ の値を求めよ。

7 [鹿児島大]

定数 a は実数で, $a > 0$, $a \neq 1$ とする。このとき, すべての正の実数 x , y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ。このことを証明せよ。

8 [上智大]

$x > 1$, $y > 1$, $z > 1$, $x^6 = y^3 = z^2$ のとき, $\log_x \frac{z}{y} + \log_y \frac{x}{z} + \log_z \frac{y}{x}$ の値を求めよ。

第2講 レベルB

1 [京都産業大]

a, b を1でない正の数とし, $A = \log_2 a, B = \log_2 b$ とする。 a, b が $\log_a 2 + \log_b 2 = 1, \log_{ab} 2 = -1, ab \neq 1$ を満たすとき, A, B を求めよ。

2

- (1) $5^x = 7^y = 10$ のとき, $10^{\frac{x+y}{xy}}$ の値を求めよ。
- (2) $3^x = a, 12^y = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ を満たす実数 x, y が存在するような a の値を求めよ。
- (3) a, b, c は正の数とする。 $a^{2x} = b^{2y} = c^{2z} = 4$ のとき, $8^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ を a, b, c を用いて表せ。

3 [防衛大学校]

$1 < b < a$ とするとき, $(\log_a b)^2, \log_a b^2, \log_a(\log_a b)$ の大小を比べよ。

4 [京都教育大]

- (1) $2^m = 3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを示せ。
- (2) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

第3講 対数と方程式・不等式, 常用対数

1 常用対数

10を底とする対数を常用対数という。

$$M = a \times 10^n \quad (n \text{ は整数}, 1 \leq a < 10) \text{ とすると} \quad \log_{10} M = \log_{10} a + n$$

2 常用対数の応用

1 自然数 N , k について

$$\begin{aligned} N \text{ が } k \text{ 桁の数} &\iff 10^{k-1} \leq N < 10^k \\ &\iff k-1 \leq \log_{10} N < k \end{aligned}$$

2 $0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れる

$$\begin{aligned} &\iff 10^{-k} \leq M < 10^{-k+1} \\ &\iff -k \leq \log_{10} M < -k+1 \end{aligned}$$

第3講 例題

1 ★☆☆

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $\log_3 x = 3$ (2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ (3) $\log_{16}(x-2) = 0.5$
(4) $\log_5 x < 3$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$ (6) $\log_{0.5}(x+3) \leq -2$

2 ★★★

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$ (2) $\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$
(3) $\log_{10}(x+2)(x+5) = 1$ (4) $\log_2(3-x) = \log_4(2x+18)$
(5) $\log_{10}(x-3) + \log_{10} x \leq 1$ (6) $\log_2(1-x) + \log_2(3-x) < 1 + \log_2 3$

3 ★★★

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$ (2) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3 \leq 0$

4 ★★★

関数 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 6$ ($1 \leq x \leq 8$) の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

5 ★★★

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- (1) $\log_{10} 5$, $\log_{10} 0.006$, $\log_{10} \sqrt{72}$ の値をそれぞれ求めよ。
(2) 6^{50} は何桁の整数か。
(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

6 ★★★

- (1) 3^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし， $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
(2) 不等式 $3^{30} > 16^n$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

第3講 例題演習

1

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $\log_5 x = 2$ (2) $\log_3 x = -1$ (3) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$
(4) $\log_5 x < 2$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 3$ (6) $\log_{0.1} x > 2$

2

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$ (2) $\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$
(3) $\log_{10}(x+2)(x+5) = 1$ (4) $\log_2(3-x) = \log_4(2x+18)$
(5) $(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 6 \geq 0$ (6) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > 2$
(7) $2\log_{0.5}(x-2) > \log_{0.5}(x+4)$ (8) $\log_2(x-2) < 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

3

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 = 0$ (2) $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 15 \leq 0$

4

$1 \leq x \leq 64$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

- (1) $y = (\log_4 x)^2 - \log_4 x^2$ (2) $y = (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} 4x$

5

25^{30} は何桁の数であるか。また， $\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ は，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

6

- (1) 1.25^n の整数部分が3桁であるような自然数 n の値の範囲を求めよ。
ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。
(2) $(0.4)^n < 10^{-15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

第3講 レベルA

1

次の方程式を解け。

(1) $2^x = 3^{2x-1}$

(2) $5^{2x} = 3^{x+2}$

2

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x + 6\log_x 2 = 5$

(2) $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leq 5$

3 [山形大]

不等式 $\log_a(3x^2 - 3x - 18) > \log_a(2x^2 - 10x)$ を解け。ただし， a は 1 と異なる正の定数とする。

4

(1) 関数 $y = \log_2(x-2) + 2\log_4(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2) $1 \leq x \leq 5$ のとき，関数 $y = 2\log_5 x + (\log_5 x)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $\frac{1}{3} \leq x \leq 27$ のとき，関数 $y = (\log_3 3x) \left(\log_3 \frac{x}{27} \right)$ の最大値と最小値を求めよ。

5

$x \geq 3$ ， $y \geq \frac{1}{3}$ ， $xy = 27$ のとき， $(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

6

$\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\log_{10} 5$ の値を求めよ。

(2) 3^{37} は何桁の整数か。

(3) 3^{37} の最高位の数字を求めよ。

7

A 市の人口は近年増加傾向にある。現在，A 市の人口は前年同時期の人口と比べて 8 % 増加している。毎年この比率で増加するとした場合，人口が現在の 5 倍を超えるのは何年後か。答えは整数で求めよ。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

第3講 レベルB

1 [早稲田大]

次の方程式，連立方程式を解け。ただし，(3)では $0 < x < 1$ ， $0 < y < 1$ とする。

$$(1) 3^{2-\log_2 x} + 26 \cdot 3^{-\log_4 x} - 3 = 0 \quad (2) (x^{\log_2 x})^{\log_2 x} = 64x^{6\log_2 x - 11}$$

$$(3) \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ 2\log_x \sin(x+y) = \log_x \sin y + \log_y \cos x \end{cases}$$

2 [津田塾大]

- (1) $0 < x \leq 2$ ， $0 < y \leq 2$ ， $y \neq 1$ の範囲で，不等式 $\frac{1}{2} \geq \log_y x$ の表す領域を図示せよ。
(2) 点 (x, y) が(1)で求めた領域を動くとき， $3x + 2y$ の最大値を求めよ。

3 [新潟大]

a を実数とする。 x に関する方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(4x-a-3)$ が異なる2つの実数解をもつとき， a のとりうる値の範囲を求めよ。