問 8．(ア)「AI 革命は単にコンピュータの速度と効率性を向上させること以上のものを意味しうる」 第 2 段第 1 文（It is crucial …）に，「AI 革命とは，コンピュータがより速く，より賢くなることだけではない」とあるのに一致する。A is about B「A の本質（意味）は B である」 not just ～「～だけでない」 (イ)「AI は身体能力だけでなく認知能力においても人間を凌駕し始めている」 第 1 段第 4 文（However, AI is …）参照。「AI は今こうした能力のうちのますます多くにおいて人間に勝り始めている」とあるが，「こうした能力」とは前文の the kind of cognitive skills only humans possessed「人間だけが所有している認知能力の類」を指しているので，本文の内容と合致している。(ウ)「人間は生化学的なパターンが生み出した兆候を認識し分析することによって，他者の意図を予測することができる」 第 3 段第 4 文（Good drivers, bankers, …）に，「優れた運転手，銀行家，法律家は，頻出するパターンを認識することによって危険を察知し回避する」という趣旨のことが述べられていることと合致している。(エ)「以前は，人間は手を使う仕事がより上手だったので，機械よりもはるかに優れた地位を保持することができた」 第 1 段第 2・3 文（In the past, … understanding human emotions.）参照。「以前，機械は身体能力において人間と競っていたために，結果，農業や工業で手を使う仕事は自動化された」という趣旨が書かれていることと矛盾する。したがって，これが正解。

数学

1　解答

(1)ア．$\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$　(2)イ．945　ウ．166

(3)エ．$\dfrac{k^2(k^2+2)}{3}$　(4)オ．1956

◀解　説▶

≪第 k 群が公差 k である群数列の項の求値，数列の和≫

(1)　第 i 群の末項を $f(i)$ とする。このとき　$f(1)=1$

第 $(i+1)$ 群の数列は，初項は，$f(i)+(i+1)$，公差 $i+1$，項数 $i+1$ の等差数列だから

$$f(i+1)=f(i)+(i+1)+(i+1)i$$
$$f(i+1)-f(i)=(i+1)^2$$

$k\geqq 2$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k-1}\{f(i+1)-f(i)\}=\sum_{i=1}^{k-1}(i+1)^2$$
$$f(k)-f(1)=-1+\sum_{i=1}^{k}i^2$$
$$\therefore\quad f(k)=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad (\because\ f(1)=1)$$

この式において，$k=1$ とすると　$f(1)=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$

となり，これは $k=1$ のときにも成立する。

よって　$f(k)=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$　$(k\geqq 1)$　→ア

(2)　$f(k)$ の定義から，$f(k)$ は $\{a_n\}$ の第 $\sum_{i=1}^{k}i$ 項，つまり，

$f(k)=a_{\frac{k(k+1)}{2}}$ である。

a_{100} が第 k 群に属するとすると　$\dfrac{(k-1)k}{2}<100\leqq\dfrac{k(k+1)}{2}$

k は自然数であり，$\dfrac{13\cdot 14}{2}=91<100<\dfrac{14\cdot 15}{2}=105$ だから，$k=14$ である。

$f(13)=a_{91}$ であり，a_{100} は第 14 群の 9 番目だから

$$a_{100}=f(13)+14\cdot 9=\frac{13\cdot 14\cdot 27}{6}+14\cdot 9=945 \quad \to イ$$

$a_n<2020$ を満たす最大の自然数 n について，第 k 群の末項 $f(k)$ が初めて 2020 以上となる k を考える。

$$f(k-1)<2020\leqq f(k)$$

つまり　$\dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6}<2020\leqq\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

k は自然数であり　$\dfrac{17\cdot 18\cdot 35}{6}=1785<2020<\dfrac{18\cdot 19\cdot 37}{6}=2109$

したがって，求める k は $k=18$ であり，$a_n<2020$ を満たす項で n が最大のものは，第 18 群に属する。

このとき　$(2020-1785)\div 18=13+\dfrac{1}{18}$

よって，第 18 群の第 13 項が求めるもので

$$n=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot 18+13=166 \quad \to ウ$$

(3)　第 k 群に含まれる数の総和を s_k とする。s_k は初項 $f(k-1)+k$, 末項 $f(k)$，項数 k の等差数列の和だから

$$\begin{aligned}s_k&=\frac{k\{f(k-1)+k+f(k)\}}{2}\\&=\frac{k^2}{12}\{(k-1)(2k-1)+6+(k+1)(2k+1)\}\\&=\frac{k^2(4k^2+8)}{12}\\&=\frac{k^2(k^2+2)}{3} \quad \to エ\end{aligned}$$

(4)　a_{30} が第 k 群に属するとすると　$\dfrac{(k-1)k}{2}<30\leqq\dfrac{k(k+1)}{2}$

k は自然数であり　$\dfrac{7\cdot 8}{2}=28<30<\dfrac{8\cdot 9}{2}=36$

だから，$k=8$ であり，a_{30} は第 8 群の 2 項目である。よって

$$\begin{aligned}S_{30}&=\sum_{i=1}^{30}a_i=\sum_{k=1}^{7}s_k+\{f(7)+8\}+\{f(7)+16\}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{7}k^2(k^2+2)+2f(7)+24\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{7}k^2(k^2+2)\\&=\frac{1}{3}(1^2\cdot 3+2^2\cdot 6+3^2\cdot 11+4^2\cdot 18+5^2\cdot 27+6^2\cdot 38+7^2\cdot 51)\\&=1+8+33+96+225+456+833\\&=1652\end{aligned}$$

$$2f(7)+24=2\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}+24=304$$

よって　$S_{30}=1652+304=1956 \quad \to オ$

2　解答

(1)　$\cos 3\theta=4t^3-3t$

$\cos 2\theta\cos 4\theta=16t^6-24t^4+10t^2-1$

$f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{1}{8}$

(2)　組 $(x,\ y)$ の総数は 27

$|-3x+7y|$ の最大値は 1278，最小値は 34

◀解　説▶

≪三角関数の積で表された関数の求値，1 次不定方程式の自然数解，関数の最大・最小≫

(1)　
$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\&=4t^3-3t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos 2\theta\cos 4\theta\\&=\cos(3\theta-\theta)\cos(3\theta+\theta)\\&=(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta)(\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta)\\&=\cos^2 3\theta\cos^2\theta-\sin^2 3\theta\sin^2\theta\\&=\cos^2 3\theta\cos^2\theta-(1-\cos^2 3\theta)(1-\cos^2\theta)\\&=\cos^2 3\theta+\cos^2\theta-1\end{aligned}$$

$=(4t^3-3t)^2+t^2-1$

$=16t^6-24t^4+10t^2-1$

$\cos 3\theta=4t^3-3t$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{9}$ のとき

$$4t^3-3t=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\\&=t\{(4t^3-3t)^2+t^2-1\}\\&=t\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2-1\right\}\quad(\because\ ①)\\&=\frac{1}{4}(4t^3-3t)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\quad(\because\ ①)\end{aligned}$$

別解 ＜別解 1＞　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2t^2-1$

$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2t^2-1)^2-1=8t^4-8t^2+1$

$\cos 2\theta\cos 4\theta=(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)$

$\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta=(2t^3-t)(8t^4-8t^2+1)=g(t)$ とおく。

①より，$t^3=\dfrac{3}{4}t+\dfrac{1}{8}$ を $g(t)$ に代入して t の次数を下げていく。

$$\begin{aligned}g(t)&=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)\{t(6t+1)-8t^2+1\}\\&=\frac{1}{4}(2t+1)(-2t^2+t+1)\\&=\frac{1}{4}(-4t^3+3t+1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

＜別解 2＞　
$$\begin{aligned}f(\theta)&=\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\\&=\frac{\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\sin\theta}=\frac{\sin 4\theta\cos 4\theta}{4\sin\theta}\\&=\frac{\sin 8\theta}{8\sin\theta}\quad\cdots\cdots(A)\end{aligned}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{9}$ のとき，$9\theta=\pi$ より　　$8\theta=\pi-\theta$

$\therefore\quad \sin 8\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\quad\cdots\cdots$(B)

(A)，(B)より　　$f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{1}{8}$

(2)　$7x+11y=2020$

$7x+11y=183\cdot 11+7$

$\therefore\quad 7(x-1)=-11(y-183)$

7 と 11 は互いに素だから

$x-1=11k,\ y-183=-7k$　（k は整数）

$x=11k+1,\ y=-7k+183$

$x,\ y$ が自然数となる条件から

$11k+1\geqq 1$ かつ $-7k+183\geqq 1$

$\Longleftrightarrow k\geqq 0$ かつ $k\leqq 26$

$\Longleftrightarrow 0\leqq k\leqq 26$

これを満たす整数 k の個数を考えて，自然数（$x,\ y$）の組の総数は 27。

$$\begin{aligned}|-3x+7y|&=|-3(11k+1)+7(-7k+183)|\\&=|-82k+1278|\\&=82\left|k-\left(15+\frac{24}{41}\right)\right|\quad(0\leqq k\leqq 26)\end{aligned}$$

k と $15+\dfrac{24}{41}$ との差が最小のときに $|-3x+7y|$ は最小となり，最大のときに $|-3x+7y|$ は最大となる。

よって，$k=16$ つまり（$x,\ y$）$=(177,\ 71)$ のとき最小値 34，$k=0$ つまり（$x,\ y$）$=(1,\ 183)$ のとき最大値 1278。

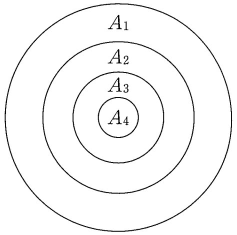
3 **解答**　(1)　$N=2020!$ とおく。N を素因数分解したときの素因数 2 の個数を k，素因数 5 の個数を l とする。

$N=2^k\cdot 5^l n$　（n は 10 と互いに素な自然数）と表せる。

1 から 2020 の自然数を全体集合 U とし，この部分集合において，

$5^5=3125>2020$ より，5^a（a は 5 以上の自然数）の倍数の要素は存在しない。

5 の倍数の集合を A_1，5^2 の倍数の集合を A_2，5^3 の倍数の集合を A_3，5^4 の倍数の集合を A_4，2 の倍数の集合を B とする。



$A_1=\{5n_1 \mid n_1=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 404\}$ より

$n(A_1)=404$

$A_2=\{5^2n_2 \mid n_2=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 80\}$ より

$n(A_2)=80$

$A_3=\{5^3n_3 \mid n_3=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16\}$ より

$n(A_3)=16$

$A_4=\{5^4n_4 \mid n_4=1,\ 2,\ 3\}$ より　　$n(A_4)=3$

$B=\{2b \mid b=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 1010\}$ より　　$n(B)=1010$

だから　　$k \geqq 1010$

$$l=4n(A_4)+3\{n(A_3)-n(A_4)\}+2\{n(A_2)-n(A_3)\}+\{n(A_1)-n(A_2)\}$$
$$=n(A_4)+n(A_3)+n(A_2)+n(A_1)$$
$$=503$$

よって，$N=n\cdot 2^{k-503}\cdot 10^{503}$ となり，N の末尾の 0 の個数は 503。 ……(答)

(2)　$M=3^{2020}$ とする。

$$\log_{10}M=2020\log_{10}3=2020\times 0.47712=963.7824 \quad \cdots\cdots ①$$

だから　　$963<\log_{10}M<964 \Longleftrightarrow 10^{963}<M<10^{964}$

よって，$M=a\times 10^{963}$　$(1\leqq a<10)$ と表せる。

$$\log_{10}M=963+\log_{10}a \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　　$\log_{10}a=0.7824$

ここで，$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.77815$

だから　　$\log_{10}6<\log_{10}a<\log_{10}7$

つまり　　$6<a<7$

以上から，M の桁数は 964，先頭の数字は 6 。 ……(答)

(3)　$M=3^{2020}=(3^2)^{1010}=(10-1)^{1010}$

$$=\sum_{r=0}^{1010}{}_{1010}C_r 10^r(-1)^{1010-r}$$
$$=1-10100+\frac{1010\cdot 1009}{2}\cdot 10^2+10^3\sum_{r=3}^{1010}{}_{1010}C_r 10^{r-3}(-1)^{1010-r}$$
$$\equiv 1-100+500 \pmod{1000}$$

$$\equiv 401 \pmod{1000}$$

よって，M の下 3 桁は，401。 ……(答)

◀解　説▶

≪年号を含む整数の性質≫

(1)　自然数 N が，$N=a\times 10^n$（a は 10 で割り切れない自然数）となるとき，N の末尾の 0 の個数は n となる。

(2)　最初に 3^{2020} の桁数 m を 3^{2020} の常用対数をとることによって求める。この桁数 m を用いて，$3^{2020}=a\times 10^{m-1}$（$1\leqq a<10$）と表せる。さらに，この両辺の常用対数をとり，$\log_{10}a$ の値を求めて，与えられた常用対数の値から a の範囲を出すことで，3^{2020} の最高位の数を得ることができる。

(3)　自然数 N の下 3 桁が表す自然数は，N を $1000=10^3$ で割った余りである。

$3^2=10-1$ を利用して　　$3^{2020}=(10-1)^{1010}$

これを二項定理を用いて展開し，10^3 で割った余りを考える。