$\boxed{1}$

(解説)

(1)　ℓ の方程式は　$y-0=\dfrac{(-2)-0}{4-(-2)}\{x-(-2)\}$　すなわち　$x+{}^{\text{ア}}3y+{}^{\text{イ}}2=0$

m の方程式は　$y-(a-1)=-\dfrac{a}{2}\{x-(-1)\}$　すなわち　${}^{\text{ウ}}ax+{}^{\text{エ}}2y+{}^{\text{オ}}2-a=0$

ℓ と m が一致するとき，$1:3=a:2$ となり　$a=\dfrac{2}{3}$

このとき，m の方程式は $x+3y+2=0$ となり，ℓ の方程式に一致している。

よって　$a=\dfrac{{}^{\text{カ}}2}{{}^{\text{キ}}3}$

$a\neq\dfrac{2}{3}$ のとき，ℓ と m の方程式を連立すると　$\begin{cases}x+3y+2=0\\ ax+2y+2-a=0\end{cases}$

これを解くと　$x=1,\ y=-1$

よって，$a\neq\dfrac{2}{3}$ のとき，ℓ と m の交点は $({}^{\text{ク}}1,\ {}^{\text{ケコ}}-1)$ である。

(2)　$x+3y+2\geqq 0$ の表す領域から境界線を除いた領域に原点は含まれている。

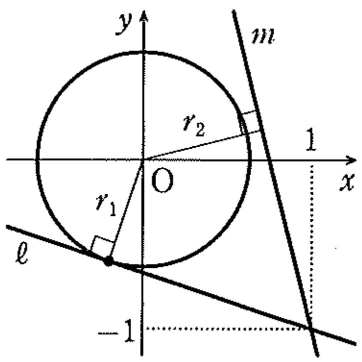
$ax+2y+2-a\leqq 0$ の表す領域から境界線を除いた領域に原点が含まれるための必要十分条件は　$a\cdot 0+2\cdot 0+2-a<0$　すなわち　$2<a$ (${}^{\text{サ}}$⑤)

以下，$a>2$ で考える。

原点から ℓ までの距離 r_1 は　$r_1=\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

原点から m までの距離 r_2 は　$r_2=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{a^2+2^2}}=\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+4}}$

[1]　$\dfrac{\sqrt{10}}{5}\leqq\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+4}}$ のとき



$\sqrt{10(a^2+4)}\leqq 5(a-2)$

両辺正であるから

$10(a^2+4)\leqq 25(a-2)^2$

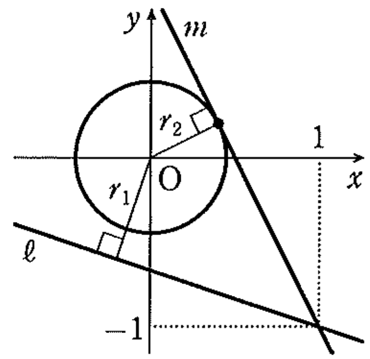
$(a-6)(15a-10)\geqq 0$

$a\leqq\dfrac{2}{3},\ 6\leqq a$

$a>2$ であるから　$a\geqq 6$

よって，$a\geqq{}^{\text{シ}}6$ のとき，$r_1\leqq r_2$ であるから，C の半径は　$\dfrac{\sqrt{{}^{\text{スセ}}10}}{{}^{\text{ソ}}5}$

[2]　$\dfrac{(a-2)}{\sqrt{a^2+4}}<\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ のとき



$5(a-2)<\sqrt{10(a^2+4)}$

$a>2$ より，両辺正であるから

$25(a-2)^2<10(a^2+4)$

$(a-6)(15a-10)<0$

$\dfrac{2}{3}<a<6$

$a>2$ であるから　$2<a<6$

よって，$2<a<6$ のとき，$r_1>r_2$ であるから，C の半径は　$\dfrac{{}^{\text{タ}}a-{}^{\text{チ}}2}{\sqrt{a^2+{}^{\text{ツ}}4}}$

特に $a=6$ のとき，C の方程式は　$x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2$

すなわち　$x^2+y^2=\dfrac{{}^{\text{テ}}2}{{}^{\text{ト}}5}$

また，m の方程式は　$6x+2y-4=0$　すなわち　$3x+y-2=0$

そして，$a=6$ のとき，ℓ，m は C の接線であり，原点とそれらの接点を通る直線は

それぞれ　$3(x-0)-(y-0)=0,\ (x-0)-3(y-0)=0$

すなわち　$3x-y=0,\ x-3y=0$

C と ℓ の共有点の座標は

$\begin{cases}x+3y+2=0\\ 3x-y=0\end{cases}$ より $(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$ であるから　$\left(\dfrac{{}^{\text{ナニ}}-1}{{}^{\text{ヌ}}5},\ \dfrac{{}^{\text{ネノ}}-3}{{}^{\text{ハ}}5}\right)$

C と m の共有点の座標は

$\begin{cases}3x+y-2=0\\ x-3y=0\end{cases}$ より $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ であるから　$\left(\dfrac{{}^{\text{ヒ}}3}{{}^{\text{フ}}5},\ \dfrac{{}^{\text{へ}}1}{{}^{\text{ホ}}5}\right)$

2

(解説)

n 回目に得られる点数を a_n とする。
すべての自然数 n に対し，1 回投げたときの得点 a_n と確率は右の表のようになる。

a_n	0	1	2	計
確率	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1) $a_1=2$ となる確率であるから $\dfrac{1}{6}$

(2) サイコロをちょうど 2 回投げてゲームが終了するのは，次の場合である。

[1] $a_1=0$ のとき $a_2=2$

[2] $a_1=1$ のとき $a_2=1$ または $a_2=2$

よって，求める確率は $\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(3) サイコロをちょうど 3 回投げてゲームが終了するのは，次の場合である。

[1] $a_1=0$，$a_2=0$ のとき $a_3=2$

[2] $a_1=0$，$a_2=1$ のとき $a_3=1$ または $a_3=2$

[3] $a_1=1$，$a_2=0$ のとき $a_3=1$ または $a_3=2$

よって，求める確率は

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{9+18+18}{216}=\frac{45}{216}=\frac{5}{24}$$

(4) サイコロをちょうど 3 回投げてゲームが終了しないのは，(3) のうち $a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=1$ の場合だけである。

よって，求める確率は $\dfrac{5}{24}-\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{5}{24}-\dfrac{1}{18}=\dfrac{11}{72}$

3

(解説)

$S=1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ ……①

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 のとき，
$n=4m$ または $n=4m-1$ (m は自然数) と表される。

[1] $n=4m$ のとき

①から $S=\dfrac{1}{2}\cdot 4m(4m+1)=2m(4m+1)$

$m(4m+1)$ は自然数であるから，S は偶数である。

[2] $n=4m-1$ のとき

①から $S=\dfrac{1}{2}(4m-1)\cdot 4m=2m(4m-1)$

$m(4m-1)$ は自然数であるから，S は偶数である。

[1]，[2] から，与えられた命題は成り立つ。

(2) S が偶数のとき，①から $\dfrac{1}{2}n(n+1)=2l$ (l は自然数) と表される。

よって $n(n+1)=4l$

n と $n+1$ は一方が偶数，他方が奇数であるから，n または $n+1$ のいずれか一方が 4 の倍数である。

[1] n が 4 の倍数のとき，n を 4 で割った余りが 0 である。

[2] $n+1$ が 4 の倍数のとき，n を 4 で割った余りが 3 である。

[1]，[2] から，与えられた命題は成り立つ。

(3) n を 8 で割った余りが 3 または 4 のとき，
$n=8k-5$ または $n=8k-4$ (k は自然数) と表される。

[1] $n=8k-5$ のとき

①から $S=\dfrac{1}{2}(8k-5)(8k-4)=2(8k-5)(2k-1)$

$8k-5$ と $2k-1$ は奇数であるから，S は 4 の倍数でない。

[2] $n=8k-4$ のとき

①から $S=\dfrac{1}{2}(8k-4)(8k-3)=2(2k-1)(8k-3)$

$2k-1$ と $8k-3$ は奇数であるから，S は 4 の倍数でない。

[1]，[2] から，与えられた命題は成り立つ。