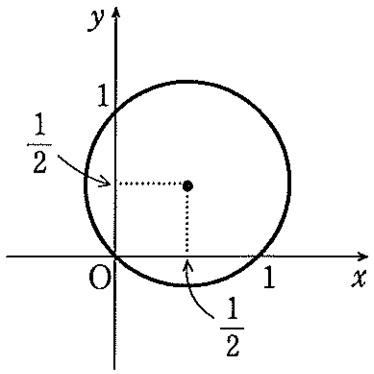
$\boxed{1}$

(解説)

(1)　① を変形すると

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

よって，① が表す図形は，中心 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円であり，右の図のようになる。



(2)　$t=x+y$ から　　$x+y-t=0$　……②

t のとりうる値の範囲は，② が表す直線と ① が表す円が共有点をもつときの t の値の範囲である。

円 ① と直線 ② が共有点をもつことは，円 ① の中心と直線 ② の距離が円の半径以下であることと同値なので

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$|1-t|\leqq1$ を解いて　　$0\leqq t\leqq2$

(3)　$F=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2-x^2y-xy^2=(x+y)^3-4xy(x+y)$

① から　　$(x+y)^2-2xy=x+y$

よって，$t^2-2xy=t$ から　　$xy=\dfrac{t^2-t}{2}$

ゆえに　　$F=t^3-4\cdot\dfrac{t^2-t}{2}\cdot t=-t^3+2t^2$

$$\frac{dF}{dt}=-3t^2+4t=-t(3t-4)$$

$\dfrac{dF}{dt}=0$ とすると　　$t=0,\ \dfrac{4}{3}$

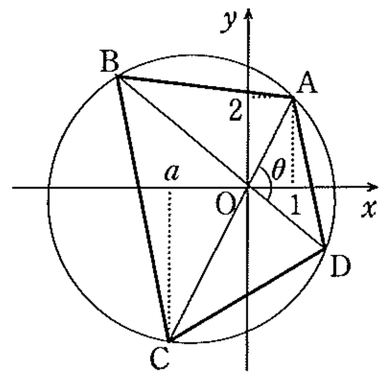
$0\leqq t\leqq2$ における F の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{4}{3}$	…	2
$\frac{dF}{dt}$	0	+	0	−	
F	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0

よって，F のとりうる値の最大値は $\dfrac{32}{27}$，最小値は 0

$\boxed{2}$

(解説)



(1)　点 $(a,\ 0)$ を H，点 $(1,\ 0)$ を K とする。

△OCH と △OAK は相似であるから

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OK}}=\frac{|a|}{1}=-a$$

である。また

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

よって　　$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}\times(-a)=-\sqrt{5}\,a$

また，O は円の 2 つの弦 BD，AC の交点であるから，

方べきの定理により　　$\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}$

条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ であるから　　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OD}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=-\sqrt{5}\,a$ であるから

$$\begin{aligned}
S&=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{ODA}\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\theta\\
&\qquad+\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\{\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5}\,a)\cdot2+(-\sqrt{5}\,a)^2+(\sqrt{5})^2\}\sin\theta\\
&=\frac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta
\end{aligned}$$

(3)　$\theta=30^\circ$ から　　$S=\dfrac{5}{2}(a-1)^2\sin30^\circ=\dfrac{5}{4}(a-1)^2$

$20\leqq S\leqq40$ から　　$20\leqq\dfrac{5}{4}(a-1)^2\leqq40$

よって　　$16\leqq(a-1)^2\leqq32$

$4\leqq|a-1|\leqq4\sqrt{2}$　……①

$a<0$ より $|a-1|=-(a-1)$ であるから，① は

$4\leqq-(a-1)\leqq4\sqrt{2}$

ゆえに　　$1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq-3$

よって，a のとりうる値の最大値は　-3

$\boxed{3}$

(解説)

n 回目に取り出したカードの数字を a_n $(1 \leqq n \leqq 4)$ とする。

(1) 2枚のカードの取り出し方の総数は　${}_5\mathrm{P}_2=20$ (通り)

2枚のカードの合計がマジックナンバーになる数字の組合せは　$\{0,\ 3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{2,\ 4\}$ の3通りある。

よって，2枚のカードを取り出したところで，初めて数字の合計がマジックナンバーになるカードの出方は

$$(a_1,\ a_2)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

の4通りである。

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

(2) 3枚のカードの取り出し方の総数は　${}_5\mathrm{P}_3=60$ (通り)

3枚のカードの合計がマジックナンバーになる数字の組合せは

$$\{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 3\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$$

の4通りある。

よって，3枚のカードを取り出したところで，初めて数字の合計がマジックナンバーになるカードの出方は

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2,\ a_3)=&(1,\ 0,\ 2),\ (2,\ 0,\ 1),\ (2,\ 0,\ 4),\ (4,\ 0,\ 2),\\ &(1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (4,\ 3,\ 2)\end{aligned}$$

の8通りである。

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{8}{60}=\dfrac{2}{15}$

(3) 1枚のカードを取り出したところで負ける確率は　$\dfrac{2}{5}$

また，4枚のカードの取り出し方は　${}_5\mathrm{P}_4=120$ (通り)

4枚のカードの合計がマジックナンバーになる数字の組合せは

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\ \{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

の2通りある。

よって，4枚のカードを取り出したところで，初めて数字の合計がマジックナンバーになるカードの出方は

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=&(1,\ 0,\ 3,\ 2),\ (1,\ 3,\ 0,\ 2),\ (2,\ 0,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 0,\ 1),\\ &(2,\ 0,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 0,\ 4),\ (4,\ 0,\ 3,\ 2),\ (4,\ 3,\ 0,\ 2)\end{aligned}$$

の8通りである。

ゆえに，4枚のカードを取り出したところで負ける確率は　$\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

したがって，このゲームで勝つ確率は　$1-\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{15}\right)=\dfrac{1}{5}$