1

解答　(1)　$ma=-3kx$　　(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$

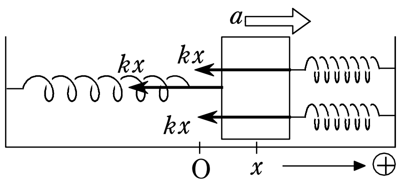
(3)　$x=R\cos\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$，$v=-R\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$，

$a=-\dfrac{3kR}{m}\cos\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$

(4)　$E=\dfrac{3}{2}kR^2$

変位 x に比例した，変位 x と反対向きの復元力 $F=-kx$ がはたらくとき，物体は $x=0$ の点を振動中心として単振動をする。単振動の加速度は $a=-\dfrac{k}{m}x$ と表され，$a=-\omega^2x$ と比べることにより，角振動数 ω は $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，周期 T は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ となる。

(1)　物体の変位が x のとき，各ばねが物体に及ぼす弾性力は $-kx$ である。したがって，物体の運動方程式は　$ma=-3kx$ ※A←



(2)　(1) より　$a=-\dfrac{3k}{m}x$

また，角振動数を ω とすると　$a=-\omega^2x$　　よって　$\omega=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

よって，周期　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$ ※B←

(3)　初期位相を ϕ とすると　変位 $x=R\sin(\omega t+\phi)$

$t=0$ のとき　$x=R$　より　$R=R\sin\phi$　　ゆえに　$\sin\phi=1$

よって　$\phi=\dfrac{\pi}{2}$ rad $(=90°)$

ゆえに　$x=R\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=R\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$　または　$R\cos\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$ ※C←

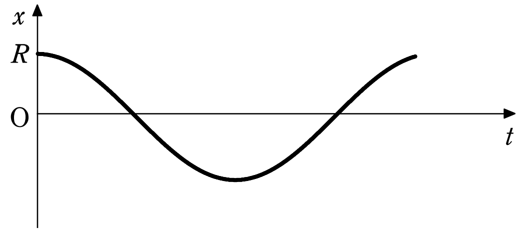
速度　$v=R\omega\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=R\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

あるいは　$-R\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$ ※D←

加速度　$a=-\omega^2x=-R\omega^2\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{3kR}{m}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

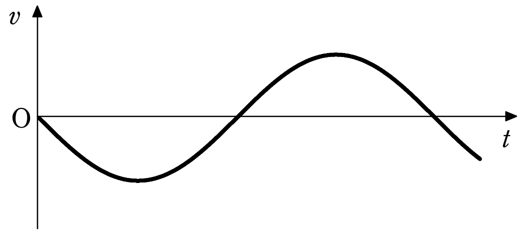
あるいは　$-\dfrac{3kR}{m}\cos\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$

別解　x-t 図をかき，関数を求めることもできる。この運動の x-t 図は



$+\cos$ 型となるから　$x=R\cos\omega t=R\cos\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t$

同様に，v-t 図は



$-\sin$ 型となるから　$v=-R\omega\sin\omega t$

別解　$x=R\cos\omega t$ を微分して

$v=\dfrac{dx}{dt}=-R\omega\sin\omega t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-R\omega^2\cos\omega t$

(4)　運動エネルギーと弾性力による位置エネルギーの和，すなわち，力学的エネルギーは保存されるので，変位が最大 $(x=R)$ のときの弾性力による位置エネルギーの和を求めればよい。$E=\dfrac{1}{2}kR^2\times3=\dfrac{3}{2}kR^2$

別解　$x=0$ のときの運動エネルギーを求めてもよい。

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(R\omega)^2=\frac{1}{2}mR^2\omega^2=\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{3k}{m}\right)=\frac{3}{2}kR^2$$

←※A　合成ばねのばね定数は $3k$ である。

←※B　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ で k を $3k$ とすれば

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

←※C　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

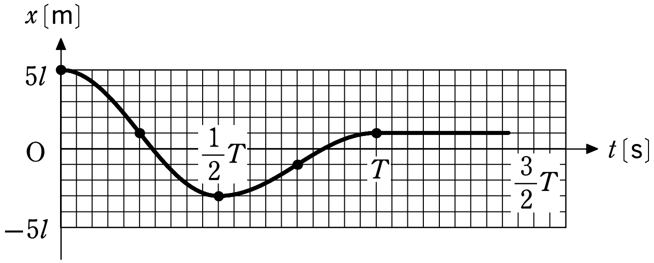
←※D　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

2

解答　(1)　(ア)　$-8kl^2$　　(イ)　$-8\mu' mgl$　　(ウ)　$\dfrac{kl}{mg}$

(2)　(エ)　$-k(x-l)$　　(オ)　l　　(カ)　$4l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　(キ)　$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(3)　(ク)　$-k(x+l)$　　(ケ)　$-l$　　(4)　次図



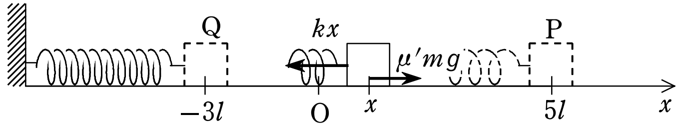
ヒント　(2)(オ)　(振動中心の位置)=(A が受ける力の合力が 0 になる位置)

(カ)　(P での力学的エネルギー)+(動摩擦力がした仕事)=(振動中心での力学的エネルギー)

(キ)　(P から Q まで移動する時間)$=\left(\text{単振動の周期の}\ \dfrac{1}{2}\ \text{倍}\right)$

(4)　A が左に進む場合と右に進む場合とで，振動の中心は異なるが，振動の周期は同じである。

(1)(ア)　弾性エネルギー「$U_k=\dfrac{1}{2}kx^2$」より



$$U_{kP}=\frac{1}{2}k(5l)^2,$$

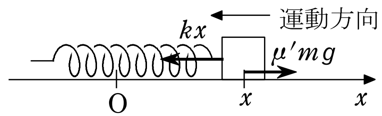
$$U_{kQ}=\frac{1}{2}k(-3l)^2$$

よって，弾性エネルギーの変化 $\varDelta U_k$〔J〕は　$\varDelta U_k=U_{kQ}-U_{kP}=-8kl^2$〔J〕

(イ)　動摩擦力の大きさは $\mu' mg$〔N〕である。動摩擦力の向きと移動の向きは逆向きだから，求める仕事 W〔J〕は　$W=-(\mu' mg)\times(8l)=-8\mu' mgl$〔J〕

(ウ)　$\varDelta U_k=W$ より※A←　$-8kl^2=-8\mu' mgl$　　ゆえに　$\mu'=\dfrac{kl}{mg}$

(2)(エ)　座標 x〔m〕において，物体にはたらく水平方向の力を図示する。



求める力 F〔N〕は

$$F=\mu' mg-kx=\frac{kl}{mg}\cdot mg-kx$$

$$=-k(x-l)\ \text{〔N〕}$$※B←

(オ)　$X=x-l$ とおくと $F=-kX$ となるので，F は復元力である。よって，物体 A は単振動と同じ運動をする。振動の中心は，合力$=0$ となる位置であるから

$-k(x-l)=0$　　よって　$x=l$〔m〕

(カ)　点 P から中心までの距離は $4l$ である(これが単振動の振幅 A となる)。それまでに動摩擦力がした仕事は　$-\mu' mg\times 4l=-4kl^2$　であるから，仕事とエネルギーの関係「初めの力学的エネルギー＋物体がされた仕事＝終わりの力学的エネルギー」より，求める速さを v〔m/s〕とすると

$$\left\{0+\frac{1}{2}k(5l)^2\right\}+(-4kl^2)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kl^2$$

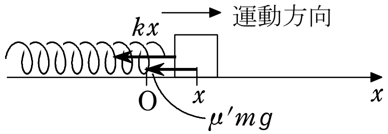
よって　$v=4l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$〔m/s〕

別解 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ だから，振動中心での速さは $v=A\omega=4l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$〔m/s〕

(キ) 単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$〔s〕※C←

P から Q までの時間 t〔s〕は $\dfrac{1}{2}T$ だから $t=\dfrac{1}{2}T=\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$〔s〕

(3)(ク) 右向きに移動する場合，動摩擦力は左向きとなるから，水平方向の力を図示して



$$合力=-kx-\mu' mg=-kx-kl$$
$$=-k(x+l)〔N〕$$

(ケ) 合力＝0 より $-k(x+l)=0$ よって $x=-l$〔m〕

(4) $t=0$ $x=5l$

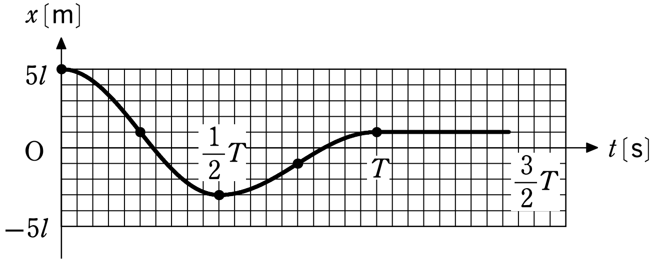
$t=\dfrac{1}{4}T$ P → Q の振動における振動の中心なので $x=l$

$t=\dfrac{1}{2}T$ 点 Q $x=-3l$

$t=\dfrac{3}{4}T$ Q → R の振動における振動の中心なので $x=-l$

$t=T$ 点 R $x=l$

これ以後は静止※D←※E←。よって，下図のようになる。



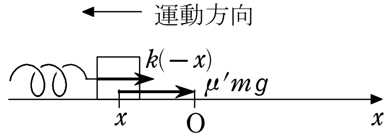
参考 ばね振り子の振動の原因は弾性力で，重力，摩擦力などには無関係，どこで振らせても (あらい水平面上，鉛直線上，斜面上，月面上など)，振動の中心は変わるが，周期は同じである。また，弾性限界内ならば，周期は振幅の大きさには無関係である。

←※A 「初めの力学的エネルギー＋物体がされた仕事＝終わりの力学的エネルギー」

より $U_{kP}+W=U_{kQ}$ よって $W=U_{kQ}-U_{kP}=\Delta U_k$

←※B 物体の位置 x は，$x>0$ として図をかくとわかりやすい。$x<0$ の場合は次図。

合力$=k(-x)+\mu' mg$



注 $x<0$ だから大きさは $k(-x)$ となる。

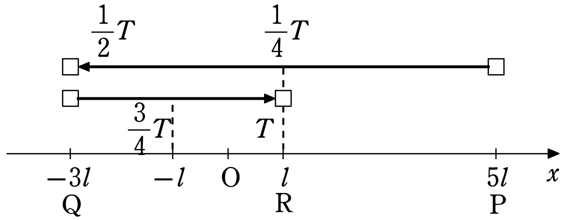
←※C 右向きの加速度を a〔m/s^2〕とすると運動方程式は $ma=-kX$

よって $a=-\dfrac{k}{m}X$

$a=-\omega^2X$ と比べると $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

ゆえに $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

←※D 運動のようすを示すと下図となる。



←※E 物体が停止した後，物体には弾性力 kl と静止摩擦力 f がはたらき，つりあって静止を続ける。