高2理系数学総合S　課題(1月30日まで)　～図形と方程式～

$\boxed{1}$

3直線 $x+y-2=0$，$3x+2y-12=0$，$kx+y-k-8=0$ の交点をそれぞれ結んだとき，その図形が三角形をなさないような定数 k の値を求めよ。

$\boxed{2}$

座標平面上の2つの円 C_1，C_2 はどちらも第1象限に中心があり，かつ x 軸，y 軸，および直線 $3x+4y=12$ に接している。C_1 と C_2 の中心間の距離はいくらか。

$\boxed{3}$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=a(x-1)$ が異なる2点P，Qで交わっている。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　a の値が(1)の範囲で変化するとき，線分PQの中点の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$

k を実数とする。直線 L を $y=kx+1-k-k^2$ とする。

(1)　直線 L が点 $(2,\ 1)$ を通るような k の値を求めよ。

(2)　k の値が実数全体を動くとき，直線 L が通る範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{5}$

直線 $\ell:2x-y-4=0$ に関して点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ と対称な点Bの座標は ア$\boxed{}$ である。

また，$\mathrm{C}(3,\ 5)$ とし，Pを直線 ℓ 上の点とするとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{PC}$ が最小になる点Pの座標は イ$\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$

r を正の実数とする。放物線 $C_1:y=x^2$ と円 $C_2:x^2+(y-1)^2=r^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$r=1$ のとき，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　放物線 C_1 と円 C_2 が共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数が，r の値によってどのように変化するか調べよ。

$\boxed{7}$

直線 ℓ は円 $C_1:x^2+y^2=5$ と点 $(-1,\ 2)$ で接し，かつ点 $(1,\ 1)$ を中心とする円 C_2 にも接する。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　円 C_2 の半径を求めよ。また，直線 ℓ と円 C_2 の接点の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の両方に接する直線で，ℓ 以外の直線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$

実数 x，y に対する次の2つの条件 p，q を考える。ただし，r は正の定数である。

$p:|x+y|\leqq 3$ かつ $|x-y|\leqq 3$

$q:(x-1)^2+(y-1)^2\leqq r^2$

(1)　命題「p ならば q」が真となるような r の最小値は $\boxed{}$ である。

(2)　命題「q ならば p」が真となるような r の最大値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{9}$

xy 平面上の2直線 $tx-y=t$，$x+ty=-2t-1$ の交点Pを考える。

(1)　点Pの y 座標を求めよ。

(2)　t が任意の実数値をとって変わるとき，点Pが描く軌跡を求めよ。

$\boxed{10}$

xy 平面上の4点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形が囲む領域(境界を含む)を D とする。2次関数 $f(x)=(x-a)^2+b$ (a，b は定数) に対して，条件「放物線 $y=f(x)$ と領域 D が共有点をもつ」を考える。

(1)　a を固定したとき，上の条件が成立するような b の値の範囲を，a の値で場合分けし，a で表せ。

(2)　上の条件を満たす点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面に図示せよ。

$\boxed{1}$

解答　$k=1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$

$\boxed{2}$

解答　$5\sqrt{2}$

$\boxed{3}$

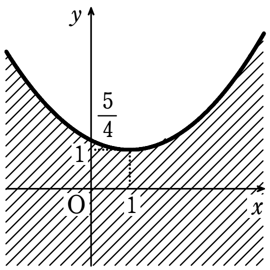
解答　(1)　$a<0,\ 4<a$　　(2)　放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

$\boxed{4}$

解答　(1)　$k=0,\ 1$

(2)　$y \leqq \dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$；〔図〕，境界線を含む

(2)



$\boxed{5}$

解答　（ア）$(5,\ 1)$　　（イ）$\left(\dfrac{15}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ 1)$　　(2)　$r \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$0<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき 0 個，　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき 2 個，　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1$ のとき 4 個，
$r=1$ のとき 3 個，　$1<r$ のとき 2 個

$\boxed{7}$

解答　(1)　$x-2y+5=0$　　(2)　半径 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，接点 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(3)　$2x-y-5=0$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\sqrt{17}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{9}$

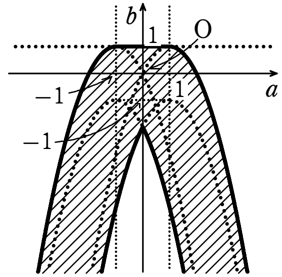
解答　(1)　$-\dfrac{2t(t+1)}{t^2+1}$

(2)　円 $x^2+(y+1)^2=2$ から点 $(1,\ -2)$ を除いた図形

$\boxed{10}$

解答　(1)　$a<-1$ のとき $-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq -(a+1)^2+1$，
$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき $-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq 1$，
$0<a \leqq 1$ のとき $-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq 1$，
$1<a$ のとき $-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq -(a-1)^2+1$

(2)　〔図〕，境界線を含む



$\boxed{1}$

解説

3 つの直線の交点をそれぞれ結んだとき，三角形をなさないための条件は，3 直線が 1 点で交わる，または 3 直線のうち平行な直線の組が存在することである。

$x+y-2=0$　…… ①

$3x+2y-12=0$　…… ②

$kx+y-k-8=0$　…… ③

とする。

[1]　3 直線が 1 点で交わるとき

2 直線 ①，② の交点の座標は，連立方程式

$$x+y-2=0,\quad 3x+2y-12=0$$

を解いて　$(8,\ -6)$

この点を直線 ③ が通るから　$8k-6-k-8=0$

よって　$k=2$

[2]　平行な直線の組が存在するとき

① の傾きは -1，② の傾きは $-\dfrac{3}{2}$，③ の傾きは $-k$

傾きを比較すると，① と ② は平行ではない。

① と ③ が平行のとき　$-1=-k$　よって　$k=1$

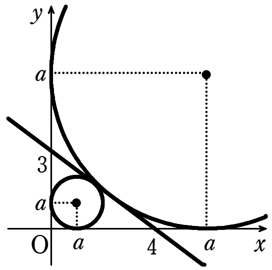
② と ③ が平行のとき　$-\dfrac{3}{2}=-k$　よって　$k=\dfrac{3}{2}$

以上より　$k=1,\ \dfrac{3}{2},\ 2$

$\boxed{2}$

解説

円 C_1，C_2 は，x 軸，y 軸に接しており，中心が第 1 象限にあるから，中心は $(a,\ a)$，半径は $a\ (a>0)$ とおける。



C_1，C_2 は直線 $3x+4y-12=0$ に接するから

$$\frac{|3a+4a-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=a$$

すなわち　$|7a-12|=5a$　…… ①

[1]　$7a-12\geqq 0$ すなわち $a\geqq\dfrac{12}{7}$ のとき

① は　$7a-12=5a$

よって　$a=6$　　これは $a\geqq\dfrac{12}{7}$ を満たす。

[2]　$7a-12<0$ すなわち $0<a<\dfrac{12}{7}$ のとき

① は　$-(7a-12)=5a$

よって　$a=1$　　これは $0<a<\dfrac{12}{7}$ を満たす。

したがって，C_1，C_2 の中心は　$(6,\ 6)$，$(1,\ 1)$

よって，中心間の距離は　$\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\boxed{3}$

解説

(1)　放物線 $y=x^2$ を C，直線 $y=a(x-1)$ を ℓ とする。

C と ℓ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2-ax+a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

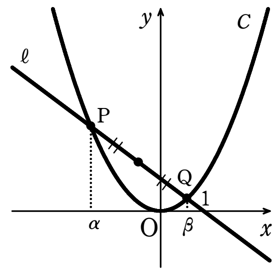
① の判別式を D とすると

$$D=(-a)^2-4\cdot 1\cdot a=a(a-4)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるための条件は，① が異なる 2 つの実数解をもつことであるから　$D>0$

ゆえに　$a(a-4)>0$　　よって　$a<0,\ 4<a$

(2)　C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，その交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，α，β は ① の 2 つの解である。



よって，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a$

中点の座標を $(X,\ Y)$ とすると，中点 $(X,\ Y)$ は ℓ 上にあるから

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{2},\qquad Y=a(X-1)$$

$a=2X$ であるから，a を消去して　$Y=2X(X-1)$

すなわち　$Y=2X^2-2X$

$a<0,\ 4<a$ であるから　$2X<0,\ 4<2X$

すなわち　$X<0,\ 2<X$

よって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-2x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

参考　$Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ とおいても解くことができるが，$Y=a(X-1)$ とおく方が計算が

らく。

4

(解説)

(1) $x=2$，$y=1$ を L の式に代入して　　$1=k\cdot 2+1-k-k^2$

すなわち　　$k^2-k=0$　　　　よって　　$k(k-1)=0$

ゆえに　　$k=0$，1

(2) L の式を k について整理すると

$$k^2-(x-1)k+y-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

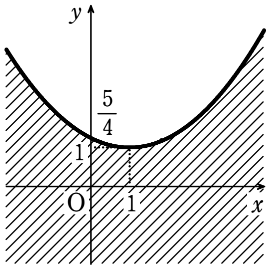
直線 L が点 $(x,\ y)$ を通るとき，① を満たす実数 k が存在する。

よって，k の 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D=\{-(x-1)\}^2-4(y-1)\geqq 0$$

すなわち　　$y-1\leqq \dfrac{1}{4}(x-1)^2$

ゆえに　　$y\leqq \dfrac{1}{4}(x-1)^2+1$



よって，直線 L が通る範囲は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

別解　実数 x を固定して考える。

直線 $y=kx+1-k-k^2$ が点 $(x,\ y)$ を通るとき

$$y=-k^2+(x-1)k+1$$

$$=-\left(k-\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1$$

$$=-\left(k-\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(x-1)^2+1$$

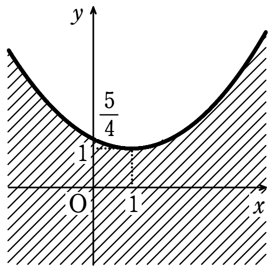
k は実数全体を動くから，y のとりうる値の範囲は

$$y\leqq \frac{1}{4}(x-1)^2+1$$

これがすべての実数 x について成り立つ。

よって，直線 L が通る範囲は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



5

(解説)

B$(p,\ q)$ とする。

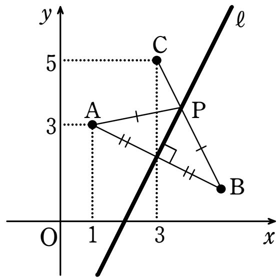
直線 ℓ の傾きは 2 であり，直線 ℓ と直線 AB は垂直に交わるから　$2\cdot\dfrac{q-3}{p-1}=-1$

整理すると

$$p+2q=7 \quad \cdots\cdots ①$$

線分 AB の中点 $\left(\dfrac{1+p}{2},\ \dfrac{3+q}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2\cdot\frac{1+p}{2}-\frac{3+q}{2}-4=0$$



整理すると　　$2p-q=9 \quad \cdots\cdots ②$

①，② から　　$p=5$，$q=1$

よって，点 B の座標は　　ア$(5,\ 1)$

また，AP＝BP であるから，AP＋PC が最小になるのは，BP＋PC が最小となるときであり，それは 3 点 B，P，C が同一直線上にあるときである。

直線 BC の方程式は　　$y-1=\dfrac{5-1}{3-5}(x-5)$

整理すると　　$y=-2x+11$

よって，直線 ℓ と直線 BC の方程式から y を消去すると

$$2x-4=-2x+11 \qquad \text{ゆえに} \qquad x=\frac{15}{4}$$

したがって，求める点Pの座標は　　${}^{イ}\left(\dfrac{15}{4},\ \dfrac{7}{2}\right)$

6

解説

(1)　$C_1：y=x^2$，$C_2：x^2+(y-1)^2=1$ から，x を消去すると

$$y+(y-1)^2=1$$

整理すると　　$y^2-y=0$　　　　すなわち　　$y(y-1)=0$

よって　　$y=0,\ 1$

これらを $y=x^2$ に代入すると

$$y=0 \text{ のとき } x=0,\quad y=1 \text{ のとき } x=\pm 1$$

したがって，求める共有点の座標は　$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$

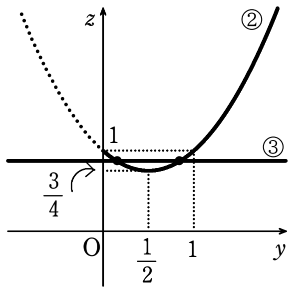
(2)　$C_1：y=x^2$，$C_2：x^2+(y-1)^2=r^2$ から，x を消去すると

$$y+(y-1)^2=r^2$$

すなわち　　$\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=r^2$　……①

C_1 と C_2 が共有点をもつための条件は，y についての2次方程式①が $y\geqq 0$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつことである。

$z=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ ……②，$z=r^2$ ……③とおいて，yz 平面上の放物線②と直線③が $y\geqq 0$ の範囲に共有点をもつような定数 r^2 の範囲を求めると，



右の図より　　$r^2\geqq\dfrac{3}{4}$

これを解くと

$$r\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\leqq r$$

$r>0$ であるから　　$r\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$y=x^2$ において，

$y>0$ を満たす y の1つの値に対して x の値は2個，

$y=0$ のときは $x=0$ の1個，

$y<0$ を満たす y の1つの値に対して x の値は0個

である。

[1]　$0<r^2<\dfrac{3}{4}$ すなわち $0<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

yz 平面上の②と③の共有点は0個である。

よって，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数は　　0個

[2]　$r^2=\dfrac{3}{4}$ すなわち $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

yz 平面上の②と③の共有点は，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ の1個である。

よって，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点は，点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の　　2個

[3]　$\dfrac{3}{4}<r^2<1$ すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1$ のとき

yz 平面上の②と③の共有点は2個であり，それぞれ $0<y<\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2}<y<1$ の範囲にある。

すなわち，$y>0$ の範囲に2個ある。

よって，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数は

$$2\times 2=4\ (個)$$

[4]　$r^2=1$ すなわち $r=1$ のとき

yz 平面上の②と③の共有点は，2点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$ である。

よって，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点は，点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ の　　3個

[5]　$r^2>1$ すなわち $r>1$ のとき

yz 平面上の②と③の共有点は1個であり，$y>1$ の範囲にある。

すなわち，$y>0$ の範囲に1個ある。

よって，放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数は

$$2\times 1=2\ (個)$$

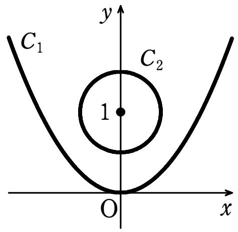
したがって，求める共有点の個数は

$0<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき 0 個，　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき 2 個，

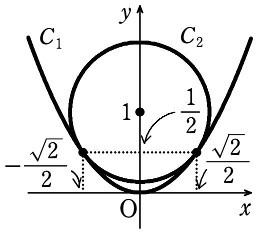
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1$ のとき 4 個，　$r=1$ のとき 3 個，　$1<r$ のとき 2 個

参考　放物線 C_1 と円 C_2 の位置関係は次のようになる。

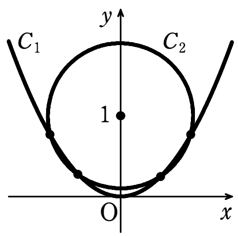
[1]　$0<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき



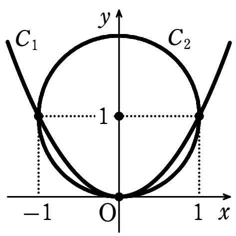
[2]　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき



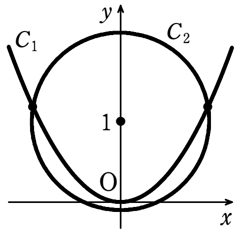
[3]　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<r<1$ のとき



[4]　$r=1$ のとき



[5]　$r>1$ のとき



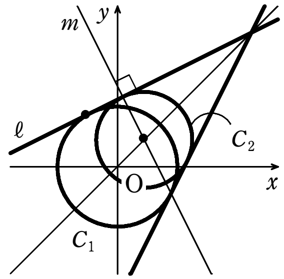
$\boxed{7}$

解説

(1)　接線 ℓ の方程式は

$$(-1)\cdot x+2y=5$$

すなわち　$x-2y+5=0$



(2)　円 C_2 の半径は，中心 $(1,\ 1)$ と接線 $x-2y+5=0$ の距離に等しい。

よって

$$\frac{|1-2\cdot1+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

また，ℓ と C_2 の接点は，C_2 の中心 $(1,\ 1)$ を通り，ℓ に垂直な直線 m と直線 ℓ との交点である。

直線 ℓ の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるから，それに垂直な直線 m の傾きは -2 である。

よって，直線 m の方程式は　$y-1=-2(x-1)$

すなわち　$2x+y-3=0$

これと ℓ の方程式 $x-2y+5=0$ を連立させて解くと

$$x=\frac{1}{5},\quad y=\frac{13}{5}$$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(3)　求める接線と円 C_1 の接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接線の方程式は

$ax+by=5$ ……①

また，$(a,\ b)$ は円 C_1 上の点であるから　$a^2+b^2=5$ ……②

接線①が円 C_2 にも接するから　$\dfrac{|a\cdot1+b\cdot1-5|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

②から　$\dfrac{|a+b-5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

すなわち　$|a+b-5|=4$

よって　$a+b-5=\pm4$　　ゆえに　$a+b=1,\ 9$

[1]　$a+b=1$ のとき

$b=1-a$ ……③ を ② に代入して　$a^2+(1-a)^2=5$

すなわち　$a^2-a-2=0$

よって　$(a+1)(a-2)=0$　ゆえに　$a=-1,\ 2$

(i)　$a=-1$ のとき

③ から　$b=2$

よって，接線の方程式は，① より　$-x+2y=5$

すなわち　$x-2y+5=0$

これは ℓ であるから，不適。

(ii)　$a=2$ のとき

③ から　$b=-1$

よって，接線の方程式は，① より　$2x-y=5$

[2]　$a+b=9$ のとき

$b=9-a$ を ② に代入して　$a^2+(9-a)^2=5$

すなわち　$a^2-9a+38=0$

この 2 次方程式の判別式 D は

$$D=(-9)^2-4\cdot 38=-71<0$$

よって，これを満たす実数 a は存在しない。

以上から，求める接線の方程式は　$2x-y-5=0$

参考　接点 $(a,\ b)$ は円 C_1 上の点であるから

$$|a|\leqq\sqrt{5},\quad |b|\leqq\sqrt{5}$$

よって　$a+b-5\leqq 2\sqrt{5}-5<0$

ゆえに，$a+b-5\fallingdotseq 4$ であることがわかる。

このことから，$a+b=9$ のとき，② を満たす実数 a，b の組は存在しない。

別解　(2)　(接点の座標)

C_2 の方程式は　$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$

ℓ の方程式から　$x=2y-5$

これを C_2 の方程式に代入して

$$\{(2y-5)-1\}^2+(y-1)^2=\frac{16}{5}$$

両辺に 5 を掛けて整理すると　$25y^2-130y+169=0$

よって　$(5y-13)^2=0$　ゆえに　$y=\dfrac{13}{5}$

このとき　$x=2\cdot\dfrac{13}{5}-5=\dfrac{1}{5}$

したがって，接点の座標は　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(3)　図形の対称性より，求める接線は，2 円 C_1，C_2 の中心を通る直線に関して，ℓ と対称な直線である。

C_1，C_2 の中心 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を通る直線の方程式は $y=x$ であるから，これに関して ℓ と対称な直線の方程式は，ℓ の方程式において x と y を入れ換えたものである。

ゆえに　$y-2x+5=0$

すなわち　$2x-y-5=0$

8

解説

(1)　条件 p の表す領域を P，条件 q の表す領域を Q とする。

条件 p について，

$|x+y|\leqq 3$ から　$-3\leqq x+y\leqq 3$

すなわち　$-x-3\leqq y\leqq -x+3$

$|x-y|\leqq 3$ から　$-3\leqq x-y\leqq 3$

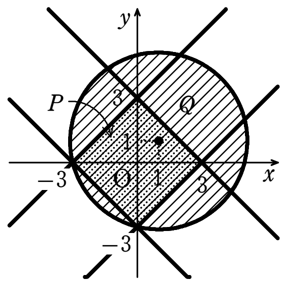
すなわち　$x-3\leqq y\leqq x+3$

よって，領域 P は右の図の網目部分となる。

ただし，境界線を含む。

また，領域 Q は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



命題「p ならば q」が真となるのは，$P\subset Q$ となるときである。

このとき，r が最小となるのは，右の図のように，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ が点 $(-3,\ 0)$ を通るときである。

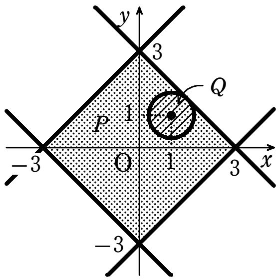
よって　　$(-3-1)^2+(0-1)^2=r^2$

$r>0$ であるから　　$r=\sqrt{17}$

(2) 命題「q ならば p」が真となるのは，$Q\subset P$ となるときである。

このとき，r が最大となるのは，右の図のように，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ が直線 $y=-x+3$ と接するときである。

直線 $x+y-3=0$ と円の中心 $(1,\ 1)$ との距離が半径 r に等しいから　　$r=\dfrac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\boxed{9}$

(解説)

(1) $tx-y=t$ ……①，$x+ty=-2t-1$ ……② とする。

②×t−① から　　$(t^2+1)y=-2t^2-2t$

$t^2+1\neq0$ であるから　　$y=-\dfrac{2t(t+1)}{t^2+1}$

したがって，交点Pの y 座標は　　$-\dfrac{2t(t+1)}{t^2+1}$

(2) ① から　　$t(x-1)=y$

よって，$x=1$ のとき　　$y=0$ ……③，

$x\neq1$ のとき　　$t=\dfrac{y}{x-1}$

$t=\dfrac{y}{x-1}$ を ② に代入して t を消去すると

$$\frac{y}{x-1}(y+2)=-x-1$$

すなわち　　$x^2+(y+1)^2=2$　　(ただし，$x\neq1$)

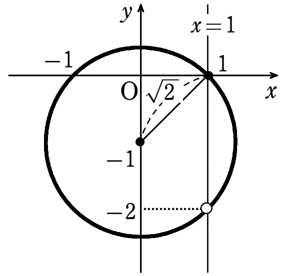
ここで，円 $x^2+(y+1)^2=2$ と直線 $x=1$ の共有点の座標を求めると　　$(1,\ 0)$，$(1,\ -2)$

③ より，円 $x^2+(y+1)^2=2$ と直線 $x=1$ の 2 つの共有点のうち，点 $(1,\ 0)$ は適する。

もう一方の点 $(1,\ -2)$ は不適である。

したがって，求める点Pの軌跡は

円 $x^2+(y+1)^2=2$ から点 $(1,\ -2)$ を除いた図形



参考　① より，$(x-1)t-y=0$ であるから，直線 ① は t の値に関わらず点 $(1,\ 0)$ を通る。

② より，$(y+2)t+x+1=0$ であるから，直線 ② は t の値に関わらず点 $(-1,\ -2)$ を通る。

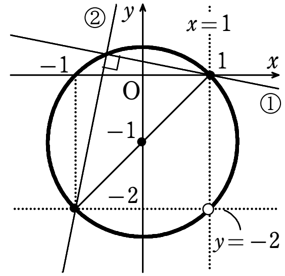
また，2 直線 ①，② は垂直である。

よって，2 直線 ①，② の交点は，2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ -2)$ を結ぶ線分を直径とする円上にある。

一方，直線 ① は，点 $(1,\ 0)$ を通る直線のうち，直線 $x=1$ のみ表さない。

また，直線 ② は，点 $(-1,\ -2)$ を通る直線のうち，直線 $y=-2$ のみ表さない。

したがって，求める軌跡は，円 $x^2+(y+1)^2=2$ から 2 直線 $x=1$，$y=-2$ の交点 $(1,\ -2)$ を除いた図形である。



$\boxed{10}$

(解説)

(1) $y=f(x)$ のグラフは，頂点の座標が $(a,\ b)$ で下に凸の放物線である。

[1] $a<-1$ のとき

$y=f(x)$ と D が共有点をもつとき，頂点の y 座標 b が最大となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(-1,\ 1)$ を通るときである。

よって　　$1=(-1-a)^2+b$

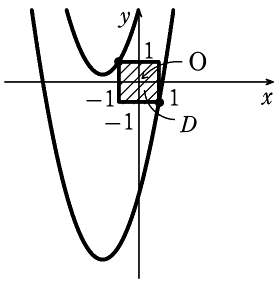
ゆえに　　$b=-(a+1)^2+1$

また，b が最小となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(1,\ -1)$ を通るときである。

よって　　$-1=(1-a)^2+b$

ゆえに　　$b=-(a-1)^2-1$

したがって　　$-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq -(a+1)^2+1$



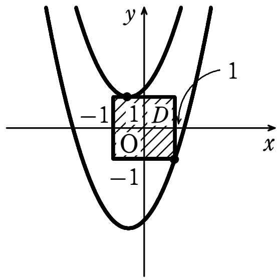
[2]　$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき

頂点の y 座標 b の最大値は，右の図より　　1

また，b が最小となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(1,\ -1)$ を通るときである。

よって　　$b=-(a-1)^2-1$

したがって　　$-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq 1$



[3]　$0 < a \leqq 1$ のとき

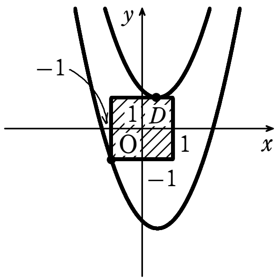
頂点の y 座標 b の最大値は，右の図より　　1

また，b が最小となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(-1,\ -1)$ を通るときである。

よって　　$-1=(-1-a)^2+b$

ゆえに　　$b=-(a+1)^2-1$

したがって　　$-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq 1$



[4]　$1 < a$ のとき

b が最大となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(1,\ 1)$ を通るときである。

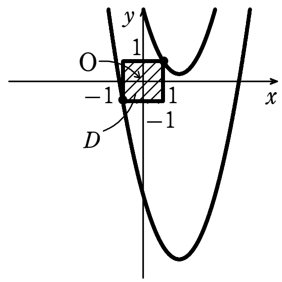
よって　　$1=(1-a)^2+b$

ゆえに　　$b=-(a-1)^2+1$

また，b が最小となるのは，右の図より，$y=f(x)$ が点 $(-1,\ -1)$ を通るときである。

よって　　$b=-(a+1)^2-1$

したがって　　$-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq -(a-1)^2+1$



[1]〜[4] より，

$a<-1$ のとき　　　$-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq -(a+1)^2+1$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　　$-(a-1)^2-1 \leqq b \leqq 1$

$0<a \leqq 1$ のとき　　$-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq 1$

$1<a$ のとき　　　$-(a+1)^2-1 \leqq b \leqq -(a-1)^2+1$

(2)　(1) の結果を図示すると，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。