

中3数学総合SA+ 確認テスト 後期第5講

氏名 _____

得点 / 10 (6点未満再テスト)

1 5点(部分点あり)

次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (ax - by)^2 - (bx - ay)^2$$

2 5点 (部分点あり)

次の等式を証明せよ。

$$a + b + c = 0 \text{ のとき } a^2 + b^2 + c^2 = 2a(a + b) + 2b(b + c) + 2c(c + a) \dots\dots \textcircled{1}$$

1 5点(部分点あり)

$$(1) \quad (\text{左辺}) = a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2) - (b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2) \\ &= a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (ax - by)^2 - (bx - ay)^2$$

2 5点 (部分点あり)

$$a + b + c = 0 \text{ より, } c = -(a + b)$$

これを①式の両辺にそれぞれ代入して

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + \{-(a + b)\}^2 \\ &= a^2 + b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) = 2a^2 + 2ab + 2b^2, \\ (\text{右辺}) &= 2a(a + b) + 2b(b + c) + 2c(c + a) \\ &= 2a(a + b) + 2b\{b - (a + b)\} + 2\{-(a + b)\}\{-(a + b) + a\} \\ &= 2a(a + b) - 2ab + 2(a + b)b = 2a^2 + 2ab + 2b^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2a(a + b) + 2b(b + c) + 2c(c + a) = 2a^2 + 2ab + 2b^2$$

であり、題意は示された

別解

$$a + b + c = 0 \text{ より, } b + c = -a, c + a = -b, a + b = -c$$

これを①式の右辺に代入して

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2a(-c) + 2b(-a) + 2c(-b) \\ &= -2ca - 2ab - 2bc \end{aligned}$$

また左辺について

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a + b + c)^2 - 2ca - 2ab - 2bc \end{aligned}$$

ここで $a + b + c = 0$ より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (0)^2 - 2ca - 2ab - 2bc \\ &= -2ca - 2ab - 2bc \end{aligned}$$

以上より

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺}) = -2ca - 2ab - 2bc \quad \text{であり、題意は示された}$$