$\boxed{1}$

次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　(2) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}\times\sqrt[3]{-25}\div\sqrt[6]{5}$

(3) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3\times\left\{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$　(4) $\sqrt[3]{54}+\dfrac{3}{2}\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}$

$\boxed{2}$

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 1.5，$\log_3 5$　(2) $\log_{0.5}3$，$\log_{0.5}2$，$\log_3 2$，$\log_5 2$

$\boxed{3}$

$\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15}40$ を a，b で表せ。

$\boxed{4}$

$a>0$ とする。$9^a+9^{-a}=14$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) 3^a+3^{-a}　(2) 3^a-3^{-a}　(3) 27^a+27^{-a}

$\boxed{5}$

次の方程式，不等式を解け。

(1) $5^{2x}=3^{x+2}$　(2) $(0.2)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$　(3) $\dfrac{1}{4^x}-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq 4$

$\boxed{6}$

関数 $y=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値と，最小値を与える x の値を求めよ。

$\boxed{7}$

12^{60} は $^{ア}\boxed{}$ 桁の整数である。また，その最高位の数は $^{イ}\boxed{}$ で，一の位の数は $^{ウ}\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{8}$

次の不等式を解け。

(1) $\log_{0.3}(2-x)\geqq\log_{0.3}(3x+14)$　(2) $\log_2(x-2)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(3) $\log_2 x+6\log_x 2=5$

$\boxed{9}$

(1) $16^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(2) $5^x=2^y=\sqrt{10^z}$，$xyz\neq 0$ であるとき，等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{z}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{10}$

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 25-2\log_4 10-3\log_8 10$　(2) $\log_4 8+\log_9\sqrt{27}$

(3) $(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 2)$　(4) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$\boxed{11}$

$x>0$，$y>0$，$x+2y=8$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。

$\boxed{12}$

$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ のとき，関数 $y=(\log_3 3x)\left(\log_3\dfrac{x}{27}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{13}$

不等式 $2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$ を解け。

1

解答　(1)　$3\sqrt{2}$　(2)　-5　(3)　-3　(4)　$4\sqrt[3]{2}$

2

解答　(1)　$1.5>\log_3 5$　(2)　$\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<\log_5 2<\log_3 2$

3

解答　$\log_2 10=1+ab$，$\log_{15}40=\dfrac{3+ab}{a+ab}$

4

解答　(1)　4　(2)　$2\sqrt{3}$　(3)　52

5

解答　(1)　$x=\dfrac{2\log_5 3}{2-\log_5 3}$　(2)　$x\leqq\dfrac{5}{6}$　(3)　$x\geqq-2$

6

解答　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最小値 -2

7

解答　(ア)　65　(イ)　5　(ウ)　6

8

解答　(1)　$-3\leqq x<2$　(2)　$4<x<3+\sqrt{3}$　(3)　$x=4,\ 8$

9

解答　(1)　81　(2)　略

10

解答　(1)　-2　(2)　$\dfrac{9}{4}$　(3)　$\dfrac{9}{4}$　(4)　1

11

解答　$x=4$，$y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$

12

解答 $x=\dfrac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4

13

解答　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，$1<x\leqq 81$

1

(1)　(与式)$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(2)　(与式)$=\sqrt[6]{125}\times(-\sqrt[3]{25})\div\sqrt[6]{5}$

$$=-(5^3)^{\frac{1}{6}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}\div 5^{\frac{1}{6}}=-5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=-5$$

参考　n が奇数のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

(3)　$(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3\times 2})^3=(\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2})^3=(-\sqrt[3]{2})^3=-2$

$$\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

よって　(与式)$=(-2)\times\dfrac{3}{2}=-3$

(4)　$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times 2}=3\sqrt[3]{2}$，　$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$，

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=-\sqrt[3]{\frac{2}{2^3}}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

よって　(与式)$=3\sqrt[3]{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}=4\sqrt[3]{2}$

2

(1)　$1.5=\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_3 3=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$　　また　$\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2=3^3=27>5^2$

底 3 は 1 より大きく，$3^{\frac{3}{2}}>5$ であるから　$\log_3 3^{\frac{3}{2}}>\log_3 5$

したがって　$1.5>\log_3 5$

(2)　底 0.5 は 1 より小さく，$3>2>1$ であるから

$$\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<0$$

$\log_3 2=\dfrac{1}{\log_2 3}$，$\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}$ で，底 2 は 1 より大きく，$1<3<5$ であるから

$$0<\log_2 3<\log_2 5$$

よって　$0<\dfrac{1}{\log_2 5}<\dfrac{1}{\log_2 3}$　すなわち　$0<\log_5 2<\log_3 2$

したがって　$\log_{0.5}3<\log_{0.5}2<\log_5 2<\log_3 2$

$\boxed{3}$

$\log_2 10=\log_2(2\cdot5)=1+\log_2 5$

ここで　$\log_2 5=\dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 5=ab$

よって　$\log_2 10=1+ab$

また　$\log_{15}40=\dfrac{\log_2 40}{\log_2 15}=\dfrac{\log_2(2^3\cdot5)}{\log_2(3\cdot5)}=\dfrac{3+\log_2 5}{\log_2 3+\log_2 5}=\dfrac{3+ab}{a+ab}$

$\boxed{4}$

(1)　$(3^a+3^{-a})^2=9^a+2\cdot3^a\cdot3^{-a}+9^{-a}=14+2\cdot1=16$

$3^a+3^{-a}>0$ であるから　$3^a+3^{-a}=4$

(2)　$(3^a-3^{-a})^2=9^a-2\cdot3^a\cdot3^{-a}+9^{-a}=14-2\cdot1=12$

$a>0$ より $a>-a$ であり，底 3 は 1 より大きいから　$3^a>3^{-a}$

ゆえに　$3^a-3^{-a}>0$　　よって　$3^a-3^{-a}=2\sqrt{3}$

(3)　$27^a+27^{-a}=(3^a+3^{-a})(9^a-3^a\cdot3^{-a}+9^{-a})$

$$=4\cdot(14-1)=52$$

$\boxed{5}$

(1)　方程式の両辺は正であるから，5 を底とする対数をとると

$\log_5 5^{2x}=\log_5 3^{x+2}$　　よって　$2x=(x+2)\log_5 3$

ゆえに　$(2-\log_5 3)x=2\log_5 3$

$2-\log_5 3\neq0$ であるから　$x=\dfrac{2\log_5 3}{2-\log_5 3}$

参考　方程式の両辺の 3 を底とする対数をとると，解は $x=\dfrac{2}{2\log_3 5-1}$ となる。

(2)　$(0.2)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$ から　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$　　よって　$5^{-(2x-1)}\geqq5^{-\frac{2}{3}}$

底 5 は 1 より大きいから　$-(2x-1)\geqq-\dfrac{2}{3}$　　これを解いて　$x\leqq\dfrac{5}{6}$

(3)　$\dfrac{1}{4^x}=2^{-2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$

よって，不等式を変形すると　$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4\leqq0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は　$t^2-3t-4\leqq0$

よって　$(t+1)(t-4)\leqq0$

$t+1>0$ であるから　$t-4\leqq0$　　ゆえに　$t\leqq4$

すなわち　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq4$　　よって　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x\geqq-2$

$\boxed{6}$

$2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係により

$t\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}$（等号成立は $x=0$ のとき）　すなわち　$t\geqq2$　……①

ここで　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$，$-2^{3+x}-2^{3-x}=-8(2^x+2^{-x})=-8t$

であるから

$$y=(t^2-2)-8t+16$$
$$=t^2-8t+14=(t-4)^2-2$$

① から，y は $t=4$ で最小値 -2 をとる。

$t=4$ のとき，$2^x+2^{-x}=4$ から

$(2^x)^2+1=4\cdot2^x$　　すなわち　$(2^x)^2-4\cdot2^x+1=0$

$2^x=X$ とおくと，$X>0$ で　$X^2-4X+1=0$

よって　$X=2\pm\sqrt{3}$　($X>0$ を満たす)

すなわち　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　ゆえに　$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

以上から，y は $x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$ で最小値 -2 をとる。

$\boxed{7}$

(ア)　$\log_{10}12^{60}=60\log_{10}(2^2\cdot3)=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=60(2\times0.3010+0.4771)=64.746$

ゆえに　$64<\log_{10}12^{60}<65$　よって　$10^{64}<12^{60}<10^{65}$

したがって，12^{60} は 65 桁の整数である。

(イ)　(ア)から　$\log_{10}12^{60}=64+0.746$

ここで　$\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

ゆえに　$\log_{10}5<0.746<\log_{10}6$　すなわち　$5<10^{0.746}<6$

よって　$5\cdot10^{64}<10^{64.746}<6\cdot10^{64}$

すなわち　$5\cdot10^{64}<12^{60}<6\cdot10^{64}$

したがって，12^{60} の最高位の数は　5

別解　(ア)から　$12^{60}=10^{64.746}=10^{64}\cdot10^{0.746}$

$10^0<10^{0.746}<10^1$ であるから，$10^{0.746}$ の整数部分が 12^{60} の最高位の数である。

ここで，$\log_{10}5=0.6990$ より　$10^{0.6990}=5$

$\log_{10}6=0.7781$ より　$10^{0.7781}=6$

$10^{0.6990}<10^{0.746}<10^{0.7781}$ から　$5<10^{0.746}<6$

よって，最高位の数は　5

(ウ)　12^1，12^2，12^3，12^4，12^5，…… の一の位の数は，順に

2，4，8，6，2，……

となり，4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。

$60=4\times15$ であるから，12^{60} の一の位の数は　6

$\boxed{8}$

(1)　真数は正であるから，$2-x>0$ かつ $3x+14>0$ より　$-\dfrac{14}{3}<x<2$　…… ①

底 0.3 は 1 より小さいから，不等式より　$2-x\leqq3x+14$

よって　$x\geqq-3$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$-3\leqq x<2$

(2)　真数は正であるから，$x-2>0$ かつ $x-4>0$ より　$x>4$

$1=\log_2 2$，$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=-\log_2(x-4)$ であるから，不等式は

$$\log_2(x-2)<\log_2 2-\log_2(x-4)$$

ゆえに　$\log_2(x-2)+\log_2(x-4)<\log_2 2$

よって　$\log_2(x-2)(x-4)<\log_2 2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x-2)(x-4)<2$

ゆえに　$x^2-6x+6<0$　よって　$3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$

$x>4$ との共通範囲を求めて　$4<x<3+\sqrt{3}$

(3)　真数は正で，底は 1 でない正の数であるから　$0<x<1$，$1<x$　…… ①

よって　$\log_2 x\neq0$

方程式の両辺に $\log_2 x$ を掛けて

$$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$$

整理して　$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$

ゆえに　$(\log_2 x-2)(\log_2 x-3)=0$　よって　$\log_2 x=2$，3

$\log_2 x=2$ から　$x=4$　$\log_2 x=3$ から　$x=8$

これらの x の値は ① を満たす。

したがって，解は　$x=4$，8

$\boxed{9}$

(1)　$16^{\log_2 3}=(2^4)^{\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^4=3^4=81$

別解　$M=16^{\log_2 3}$　(>0) とおいて，両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 M=\log_2 16^{\log_2 3}=\log_2 3\cdot\log_2 16=4\log_2 3=\log_2 3^4$$

よって　$M=3^4=81$

(2)　$5^x=2^y=\sqrt{10^z}=k$ とおく。

$xyz\neq0$ から　$x\neq0$，$y\neq0$，$z\neq0$

ゆえに　$k>0$, $k \neq 1$

$5^x=k$ から　$x=\log_5 k$,　$2^y=k$ から　$y=\log_2 k$

$\sqrt{10^z}=10^{\frac{z}{2}}=k$ から　$\dfrac{z}{2}=\log_{10} k$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{\log_5 k}+\dfrac{1}{\log_2 k}=\log_k 5+\log_k 2=\log_k 10=\dfrac{1}{\log_{10} k}=\dfrac{2}{z}$

別解　$5^x=2^y=\sqrt{10^z}$ (>0) の各辺の 10 を底とする対数をとると

$$x\log_{10}5=y\log_{10}2=\frac{z}{2}$$

よって　$x=\dfrac{z}{2\log_{10}5}$,　$y=\dfrac{z}{2\log_{10}2}$

$xyz \neq 0$ から　$x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$

したがって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2\log_{10}5}{z}+\dfrac{2\log_{10}2}{z}$

$$=\frac{2(\log_{10}5+\log_{10}2)}{z}=\frac{2\log_{10}10}{z}=\frac{2}{z}$$

10

(1)　$\log_2 25-2\log_4 10-3\log_8 10=\log_2 25-2\cdot\dfrac{\log_2 10}{\log_2 4}-3\cdot\dfrac{\log_2 10}{\log_2 8}$

$$=\log_2 5^2-2\cdot\frac{\log_2(2\cdot 5)}{2}-3\cdot\frac{\log_2(2\cdot 5)}{3}$$

$$=2\log_2 5-(1+\log_2 5)-(1+\log_2 5)=-2$$

(2)　$\log_4 8+\log_9\sqrt{27}=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}+\dfrac{\log_3\sqrt{27}}{\log_3 9}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

(3)　$(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 2)=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\left(\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$$=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(\log_2 3)\cdot\frac{3}{2\log_2 3}=\frac{9}{4}$$

(4)　$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 5}=1$

別解　(1)　$\log_2 25-2\log_4 10-3\log_8 10=\log_2 5^2-\log_{2^2}10^2-\log_{2^3}10^3$

$$=2\log_2 5-\log_2 10-\log_2 10$$

$$=2\log_2\frac{5}{10}=2\log_2 2^{-1}=-2$$

(2)　$\log_4 8+\log_9\sqrt{27}=\log_{2^2}2^3+\log_{3^2}3^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

(3)　$(\log_2 3+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 2)=\left(\log_2 3+\dfrac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_2 9}\right)$

$$=\frac{3}{2}\log_2 3\left(\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{3\log_2 3}{2}\cdot\frac{3}{2\log_2 3}=\frac{9}{4}$$

(4)　$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2=1$

11

$x+2y=8$ から　$x=8-2y$　…… ①

$x>0$ から　$8-2y>0$　よって　$y<4$

$y>0$ と合わせて　$0<y<4$　…… ②

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}(8-2y)y$$

$$=\log_{10}(-2y^2+8y)$$

$$=\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$$

$-2(y-2)^2+8$ は，② の範囲で $y=2$ で最大値 8 をとる。

底 10 は 1 より大きいから，このとき $\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$ も最大で，

その最大値は　$\log_{10}8=3\log_{10}2$

また，① から，$y=2$ のとき　$x=4$

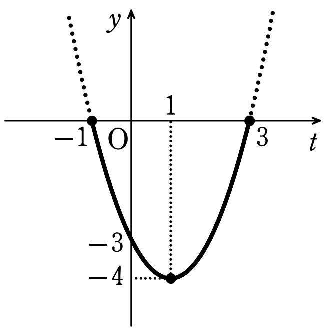
よって，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は $x=4$, $y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$ をとる。

$\boxed{12}$

$\log_3 x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 27$ であるから

$$\log_3 \frac{1}{3} \leqq t \leqq \log_3 27$$

すなわち　$-1 \leqq t \leqq 3$　……①



$\log_3 3x = 1 + \log_3 x$，$\log_3 \dfrac{x}{27} = \log_3 x - 3$ である

から，y を t の式で表すと

$$y = (1+t)(t-3) = t^2 - 2t - 3 = (t-1)^2 - 4$$

① の範囲において，y は

$t=-1$，3 で最大値 0，$t=1$ で最小値 -4

をとる。$t = \log_3 x$ より，$x = 3^t$ であるから

$t=-1$ のとき　$x = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$，$t=3$ のとき　$x = 3^3 = 27$，

$t=1$　のとき　$x=3$

よって　　$x = \dfrac{1}{3}$，27 で最大値 0；$x=3$ で最小値 -4

$\boxed{13}$

真数，底の条件から　　$0 < x < 1$，$1 < x$

$\log_x 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 x} = \dfrac{3}{\log_3 x}$ であるから，不等式は

$$2\log_3 x - \frac{12}{\log_3 x} \leqq 5 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$0 < x < 1$ のとき　　$\log_3 x < 0$

① の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　　$2(\log_3 x)^2 - 12 \geqq 5\log_3 x$

整理して　　$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \geqq 0$

ゆえに　　$(\log_3 x - 4)(2\log_3 x + 3) \geqq 0$

$\log_3 x < 0$ より $\log_3 x - 4 < 0$ であるから　　$2\log_3 x + 3 \leqq 0$

よって　　$\log_3 x \leqq -\dfrac{3}{2}$

底 3 は 1 より大きいから　　$x \leqq 3^{-\frac{3}{2}}$　すなわち　$x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

$0 < x < 1$ との共通範囲は　　$0 < x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

[2]　$x > 1$ のとき　　$\log_3 x > 0$

① の両辺に $\log_3 x$ を掛けて　　$2(\log_3 x)^2 - 12 \leqq 5\log_3 x$

整理して　　$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leqq 0$

ゆえに　　$(\log_3 x - 4)(2\log_3 x + 3) \leqq 0$

$\log_3 x > 0$ より $2\log_3 x + 3 > 0$ であるから　　$\log_3 x - 4 \leqq 0$

よって　　$0 < \log_3 x \leqq 4$

底 3 は 1 より大きいから

$3^0 < x \leqq 3^4$　すなわち　$1 < x \leqq 81$

[1]，[2] から，解は　　$0 < x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$，$1 < x \leqq 81$