$\boxed{1}$

座標平面上に点 A $(1,\ 0)$，P $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，Q $(2\cos 3\theta,\ 2\sin 3\theta)$ をとる。θ が $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ の範囲を動くとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PQ}^2$ の最大値と最小値を求めよう。

AP^2 は $\mathrm{AP}^2 = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\cos 2\theta = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\cos^2\theta$ である。

また，PQ^2 は $\mathrm{PQ}^2 = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\cos\theta$ である。

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ であるから，$\boxed{\text{キク}} < \cos\theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

したがって，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PQ}^2$ は，$\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のとき最大値 $\boxed{\text{スセ}}$ をとり，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

$\boxed{2}$

a を定数とする。x の方程式 $4^{x+a}-2^{x+a}+a=0$ ……① がただ一つの解をもつとき，その解を求めよう。

(1) $X=2^x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $X \geqq 0$　① $X>0$　② $X \geqq 1$　③ $X>1$

また，① を X を用いて表すと，X の 2 次方程式

$$2^{\boxed{\text{イウ}}}X^2-2^{\boxed{\text{エ}}}X+a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D とすると $D=2^{\boxed{\text{イウ}}}\left(\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}a\right)$ である。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，② は $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつ。

したがって，① も　ただ一つの解をもち，その解は $x=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) $a \neq \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，② が $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ $a>0$　① $a<0$　② $a \geqq 0$

③ $a \leqq 0$　④ $a>\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　⑤ $a<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

$\boxed{\text{コ}}$ のとき，① もただ一つの解をもち，その解は

$x=\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}+\log_2\left(\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}a}\right)$ である。

$\boxed{3}$

x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で $a \neq 0$ とする。

(1)　実数 α，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2)　実数 α，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

$\boxed{4}$

次の数列を考える。

$$\frac{1\times 2}{1\times 2} \,\Big|\, \frac{2\times 3}{1\times 2},\ \frac{2\times 3}{2\times 3},\ \frac{1\times 2}{2\times 3} \,\Big|\, \frac{3\times 4}{1\times 2},$$
$$\frac{3\times 4}{2\times 3},\ \frac{3\times 4}{3\times 4},\ \frac{2\times 3}{3\times 4},\ \frac{1\times 2}{3\times 4} \,\Big|\, \frac{4\times 5}{1\times 2},\ \cdots\cdots$$

つまり，第 1 群には 1 個の分数があり，第 2 群には 3 個の分数があり，一般に，第 k 群には $(2k-1)$ 個の分数がある $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$。また，第 k 群の i 番目の分数は

$1 \leqq i \leqq k$ のとき　　$\dfrac{k(k+1)}{i(i+1)}$

$k+1 \leqq i \leqq 2k-1$ のとき　　$\dfrac{(2k-i)(2k-i+1)}{k(k+1)}$

である。まず，第 1 群の分数が並び，次に，第 2 群の分数が並び，以下，順次各群の分数が並んでいる数列である。例えば，この数列の第 6 項は，第 3 群の 2 番目の分数であり，$\dfrac{3\times 4}{2\times 3}$ である。

(1)　この数列の第 101 項を求めよ。

(2)　この数列の初項から第 100 項までの和を求めよ。