高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第8講

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　得点　　／　10

$\boxed{1}$

xy 平面上の点 $(x,\ y)$ で x と y がともに整数である点を格子点という。自然数 n について，$y \geqq nx$ および $y \leqq 2n^2 - x^2$ を満たす格子点の総数を n で表せ。

高2理系数学総合S　確認テスト　1～3月期第8講【解答】

$\boxed{1}$

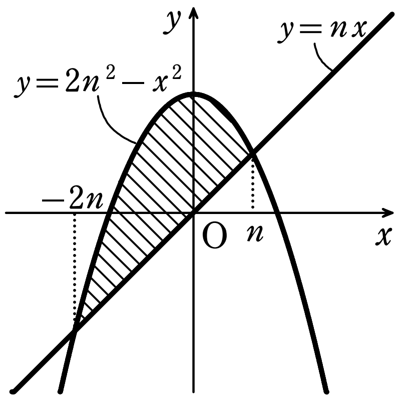
解答　$\dfrac{1}{2}(3n+1)(3n^2-n+2)$

$\boxed{1}$

直線 $y=nx$ と放物線 $y=2n^2-x^2$ の共有点の x 座標は，方程式 $nx=2n^2-x^2$ の実数解である。

$nx=2n^2-x^2$ から　　$x^2+nx-2n^2=0$　　　　すなわち　　$(x+2n)(x-n)=0$

これを解いて　　$x=-2n$，n　　」2点



求める格子点の個数は，直線 $y=nx$ と放物線 $y=2n^2-x^2$ で囲まれた領域の周および内部にある格子点の個数と等しい。

$-2n \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上の格子点の個数は

$$(2n^2-k^2)-nk+1=-(k+2n)(k-n)+1 \text{（個）}$$

したがって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=-2n}^{n}\{-(k+2n)(k-n)+1\} \quad 」4点$$

$$=\sum_{l=0}^{3n}\{-l(l-3n)+1\}=\sum_{l=0}^{3n}(-l^2+3nl+1)$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot 3n(3n+1)(6n+1)+3n\cdot\frac{1}{2}\cdot 3n(3n+1)+(3n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3n+1)\{-n(6n+1)+9n^2+2\}=\frac{1}{2}(3n+1)(3n^2-n+2) \quad 」4点$$