1

ある変量のデータが 2，13，10，5，8，x であるとする。

(1)　$x=4$ であるとき，データの分散は ア$\boxed{}$ である。

(2)　データの中央値が 7 であるとき，$x=$ イ$\boxed{}$ である。

(3)　データの平均値と中央値が等しくなるような x の値は ウ$\boxed{}$ 個ある。また，データの平均値と中央値が等しくなるような x の値のうち最大のものは エ$\boxed{}$ である。

解答　(ア)　14　(イ)　6　(ウ)　3　(エ)　16

解説

(1)　データの平均値は　$\dfrac{2+13+10+5+8+x}{6}=\dfrac{38+x}{6}$

よって，$x=4$ のときデータの平均値は　$\dfrac{38+x}{6}=\dfrac{38+4}{6}=7$

ゆえに，データの分散は

$$\frac{1}{6}\{(2-7)^2+(13-7)^2+(10-7)^2+(5-7)^2+(8-7)^2+(4-7)^2\}={}^{ア}14$$

(2)　x 以外のデータを小さい方から順に並べると　2，5，8，10，13

よって，データの中央値が 7 になる条件は　$5<x<8$ かつ $\dfrac{x+8}{2}=7$

$\dfrac{x+8}{2}=7$ より　$x={}^{イ}6$

これは，$5<x<8$ を満たす。

(3)　[1]　$x\leqq5$ のとき

データの中央値は　$\dfrac{5+8}{2}=\dfrac{13}{2}$

よって，データの平均値と中央値が等しいとき　$\dfrac{38+x}{6}=\dfrac{13}{2}$

すなわち　$x=1$　これは $x\leqq5$ を満たす。

[2]　$5<x\leqq10$ のとき

データの中央値は　$\dfrac{x+8}{2}$

よって，データの平均値と中央値が等しいとき　$\dfrac{38+x}{6}=\dfrac{x+8}{2}$

すなわち　$x=7$　これは $5<x\leqq10$ を満たす。

[3]　$10<x$ のとき

データの中央値は　$\dfrac{8+10}{2}=9$

よって，データの平均値と中央値が等しいとき　$\dfrac{38+x}{6}=9$

すなわち　$x=16$　これは $10<x$ を満たす。

[1]～[3] から，データの平均値と中央値が等しくなるような x の値は ${}^{ウ}3$ 個あり，そのうち最大のものは ${}^{エ}16$ である。

2

あるタワーが立っている地点 K と同じ標高の地点 A からタワーの先端の仰角を測ると 30° であった。また，地点 A から AB＝114 (m) となるところに地点 B があり，∠KAB＝75° および ∠KBA＝60° であった。このとき，AK の距離は ア$\boxed{}$ m，タワーの高さは イ$\boxed{}$ m である。

解答　(ア)　$57\sqrt{6}$　(イ)　$57\sqrt{2}$

解説

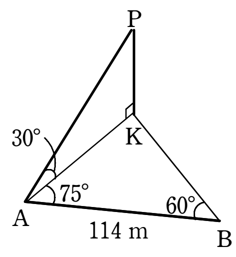
$\angle AKB=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

△KAB において，正弦定理により　$\dfrac{AK}{\sin60^\circ}=\dfrac{114}{\sin45^\circ}$

よって　$AK=114\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}={}^{ア}57\sqrt{6}$ (m)

タワーの先端を P とすると，タワーの高さ PK は

$PK=AK\tan30^\circ=57\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}={}^{イ}57\sqrt{2}$ (m)



3

市長選挙に X，Y の 2 人が立候補した。有権者から無作為に 20 人を選んで調べたところ X の支持者が 15 人とわかった。この調査から，X の方が支持者が多いと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を 0.05 として考察せよ。ただし，公正なコインを 20 回投げて表の出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ，次のようになったとし，この結果を用いよ。

表の回数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	計
度数	1	5	9	16	28	38	35	30	25	9	2	1	1	200

解答　X の方が支持者が多いと判断してよい

解説

[1]　X の方が支持者が多い

と判断してよいかを考察するため，次の仮定を立てる。

[2]　どちらの回答も全くの偶然で起こる

コイン投げの実験結果を利用すると，表が 15 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{2+1+1}{200}=0.02$$

0.02 は基準となる確率 0.05 より小さいから，[2] の仮定が正しくなかったと考えられる。

よって，[1] の主張は正しい，つまり X の方が支持者が多いと判断してよい。

4

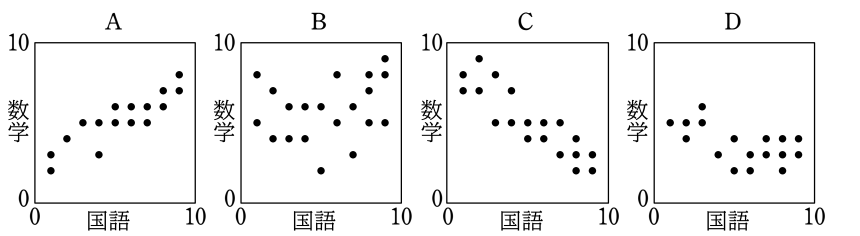
右の表は，あるクラスの生徒 5 人に対して行われた，それぞれ 10 点満点の国語と数学のテストの得点をまとめたものである。

生徒番号	①	②	③	④	⑤	平均	分散
国語	8	4	2	6	10	a	b
数学	5	6	7	4	3	5	2

(1)　a，b の値をそれぞれ求めよ。

(2)　国語と数学の得点の相関係数を求めよ。

(3)　次に示す 4 つの散布図は，同じテストを行った他のクラスの国語と数学の得点の散布図である。ただし，生徒の人数は異なる。相関係数が (2) で求めた値に最も近い散布図を選べ。



解答　(1)　$a=6$，$b=8$　(2)　-0.9　(3)　C

解説

国語の得点を x，数学の得点を y とする。

(1)　国語の得点の平均値 a は　$a=\dfrac{1}{5}(8+4+2+6+10)=\dfrac{30}{5}=6$

国語の得点の分散 b は　$b=\dfrac{1}{5}\{(8-6)^2+(4-6)^2+(2-6)^2+(6-6)^2+(10-6)^2\}$

$=\dfrac{40}{5}=8$

(2)　数学の得点の平均値を $\overline{y}$ とすると　$\overline{y}=5$

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$
①	8	5	2	0	0	4	0
②	4	6	−2	1	−2	4	1
③	2	7	−4	2	−8	16	4
④	6	4	0	−1	0	0	1
⑤	10	3	4	−2	−8	16	4
計	30	25			−18	40	10

上の表から，相関係数 r は　$r=\dfrac{-18}{\sqrt{40}\sqrt{10}}=-0.9$

(3)　(2) より，r は負で -1 に近いから，国語の得点と数学の得点の間には，強い負の相関があると考えられる。よって，A～D の中から，強い負の相関があるものを選んで

C

$\boxed{5}$

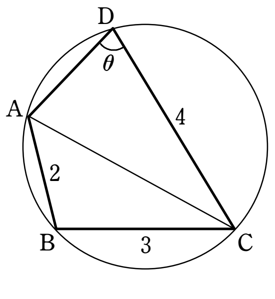
円Oに内接する四角形ABCDにおいて，$\angle\mathrm{ADC}=\theta$ とする。$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CD}=4$，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 対角線ACと辺ADの長さを求めよ。
(2) 対角線BDの長さを求めよ。
(3) 四角形ABCDの面積 S を求めよ。

解答 (1) $\mathrm{AC}=4$，$\mathrm{AD}=2$　(2) $\mathrm{BD}=\dfrac{7}{2}$　(3) $S=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

解説

(1) 四角形ABCDは円に内接するから　$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-\theta$



△ABCにおいて，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=4+9+12\cos\theta=16$$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathrm{AC}=4$

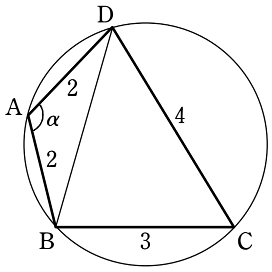
△ACDにおいて，余弦定理により

$$4^2=4^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot4\cdot\mathrm{AD}\cos\theta$$

よって　$\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AD}=0$　すなわち　$\mathrm{AD}(\mathrm{AD}-2)=0$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　$\mathrm{AD}=2$

(2) 四角形ABCDは円に内接するから，$\angle\mathrm{BAD}=\alpha$ とすると　$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\alpha$



△ABDにおいて，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\alpha$$
$$=8-8\cos\alpha\quad\cdots\cdots①$$

△BCDにおいて，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$=25+24\cos\alpha\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$8-8\cos\alpha=25+24\cos\alpha$

よって　$\cos\alpha=-\dfrac{17}{32}$　……③

①，③から　$\mathrm{BD}^2=8-8\cdot\left(-\dfrac{17}{32}\right)=\dfrac{49}{4}$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathrm{BD}=\dfrac{7}{2}$

(3) $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ADC}=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

ゆえに　$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

$\boxed{6}$

△ABCにおいて $\dfrac{\sin A}{6}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$ が成り立っている。

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。
(2) △ABCの内接円の半径が1であるとき，ABの長さ，△ABCの面積，△ABCの外接円の半径を求めよ。

解答 (1) $\cos A=\dfrac{1}{8}$，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　(2) 順に $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，$\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$，$\dfrac{16}{7}$

解説

△ABCの外接円の半径を R とする。

(1) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

よって　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これと条件式 $\dfrac{\sin A}{6}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$ から

$$\frac{a}{6\cdot2R}=\frac{b}{5\cdot2R}=\frac{c}{4\cdot2R}\quad すなわち\quad \frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4}$$

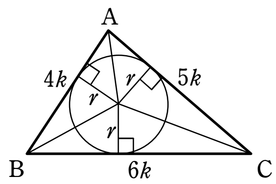
$\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{c}{4}$ の値を $k\,(k>0)$ とおくと　$a=6k$，$b=5k$，$c=4k$

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{(5k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\cdot5k\cdot4k}=\dfrac{5k^2}{2\cdot5\cdot4k^2}=\dfrac{1}{8}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

(2) △ABCの内接円の半径を r，面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

よって　$\dfrac{1}{2}\cdot5k\cdot4k\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(6k+5k+4k)$



整理して　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}k^2=\dfrac{15}{2}k$

$k>0$ から　$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}k=\dfrac{15}{2}$　よって　$k=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=c=4k=4\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

$$S=\frac{15}{2}k=\frac{15}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{15\sqrt{7}}{7}$$

正弦定理により，△ABCの外接円の半径 R は

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{6k}{2\sin A}=3\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{8}{3\sqrt{7}}=\frac{16}{7}$$

$\boxed{7}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たす二等辺三角形ABCを考える。DをABの中点とし，$\angle\mathrm{ACD}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCD}=\beta$ とする。

(1) $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。
(2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ の値を求めよ。
(3) $\sin\alpha$ の値を求めよ。

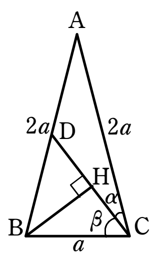
解答 (1) $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{1}{2}$　(3) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$

解説

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AB}=2a$ とおく。

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{2}a}{2a}=\dfrac{1}{4}$

(2) △BCDにおいて，余弦定理により $\mathrm{CD}^2=a^2+a^2-2a^2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}a^2$



$\mathrm{CD}>0$ であるから　$\mathrm{CD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

点Dは辺ABの中点であるから　$\triangle\mathrm{CAD}=\triangle\mathrm{CDB}$

よって　$\dfrac{1}{2}\cdot2a\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\sin\alpha=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\sin\beta$

すなわち　$2\sin\alpha=\sin\beta$　ゆえに　$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{1}{2}$

(3) BからCDに垂線を引いて交点をHとすると

$$\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{CH}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$$

よって　$\sin\beta=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　ゆえに，(2)から　$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$

$\boxed{8}$

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする。
また，辺 OC 上に点 E をとり，CE$=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。　　　　　　(2)　$\cos\angle$DAE を t を用いて表せ。

(3)　△ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

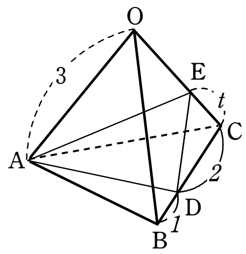
解答　(1)　$\sqrt{7}$　　(2)　$\cos\angle\mathrm{DAE}=\dfrac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$

(3)　$t=\dfrac{10}{9}$ で面積 $\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

解説

(1)　△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos 60^\circ$$
$$=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\frac{1}{2}=7$$



AD>0 であるから　　AD$=\sqrt{7}$

(2)　△ACE において，余弦定理により

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{CE}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CE}\cos 60^\circ$$
$$=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-3t+9$$

よって　　$\mathrm{AE}=\sqrt{t^2-3t+9}$

△CDE において，余弦定理により

$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{CE}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CE}\cos 60^\circ$$
$$=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\frac{1}{2}=t^2-2t+4$$

よって　　$\mathrm{DE}=\sqrt{t^2-2t+4}$

したがって，△ADE において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{DAE}=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2-\mathrm{DE}^2}{2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}}=\frac{7+t^2-3t+9-(t^2-2t+4)}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}}$$
$$=\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

(3)　$\sin^2\angle\mathrm{DAE}=1-\dfrac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}=\dfrac{28(t^2-3t+9)-(144-24t+t^2)}{28(t^2-3t+9)}$

$$=\frac{27t^2-60t+108}{28(t^2-3t+9)}$$

よって　　$\sin\angle\mathrm{DAE}=\dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$

したがって　　$\triangle\mathrm{ADE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{DAE}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{27t^2-60t+108}$$

$0\leqq t\leqq 3$ であり，$27t^2-60t+108=27\left(t-\dfrac{10}{9}\right)^2+\dfrac{224}{3}$ であるから，△ADE の面積が最小となるのは，$t=\dfrac{10}{9}$ のときで，そのときの面積は　　$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{224}{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

$\boxed{9}$

次の変量 x のデータについて，以下の問いに答えよ。

514，584，598，521，605，612，577

(1)　$y=x-570$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2)　$u=\dfrac{x-570}{7}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ。

解答　(1)　$\overline{x}=573$　　(2)　1356

解説

(1)　$\overline{y}=\dfrac{1}{7}\{(-56)+14+28+(-49)+35+42+7\}=3$

ゆえに　　$\overline{x}=\overline{y}+570=573$

(2)　$u=\dfrac{x-570}{7}$ とおくと，u，u^2 の値は次のようになる。

x	514	584	598	521	605	612	577	計
y	-56	14	28	-49	35	42	7	21
u	-8	2	4	-7	5	6	1	3
u^2	64	4	16	49	25	36	1	195

よって，u のデータの分散は

$$\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\frac{195}{7}-\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{1356}{49}$$

ゆえに，x のデータの分散は

$$7^2\times\frac{1356}{49}=1356$$

$\boxed{10}$

変量 x の大きさ 50 のデータの中央値は 56，四分位偏差は 15 である。このとき新しい変量 $y=2x-20$ のデータの中央値は $^{ア}\boxed{}$，四分位偏差は $^{イ}\boxed{}$ である。

解答　(ア)　92　　(イ)　30

解説

変量 x のデータを値の小さい順に x_1，……，x_{50} とすると，変量 x は大きさ 50 のデータであるから，第 1 四分位数は x_{13}，中央値は $\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}$，第 3 四分位数は x_{38} である。

ゆえに　　$\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}=56$　……①，　　$\dfrac{x_{38}-x_{13}}{2}=15$　……②

変量 y のデータを値の小さい順に y_1，……，y_{50} とすると，$y=2x-20$ より，
x_1，……，x_{50} とそれに対応する y_1，……，y_{50} の順番は変わらない。

よって，第 1 四分位数は y_{13}，中央値は $\dfrac{y_{25}+y_{26}}{2}$，第 3 四分位数は y_{38} である。

したがって，y の中央値は

$$\frac{y_{25}+y_{26}}{2}=\frac{(2x_{25}-20)+(2x_{26}-20)}{2}=x_{25}+x_{26}-20$$
$$=2\times56-20={}^{ア}92$$

y の四分位偏差は

$$\frac{y_{38}-y_{13}}{2}=\frac{(2x_{38}-20)-(2x_{13}-20)}{2}=x_{38}-x_{13}$$
$$=2\times15={}^{イ}30$$

$\boxed{11}$

四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さが 2 の正方形で，辺 OA，OB，OC，OD の長さは $\sqrt{6}$ であるとする。

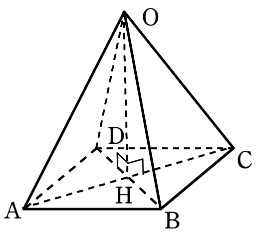
(1)　四角錐 OABCD の体積は $^{\text{ア}}\boxed{}$，四角錐 OABCD に内接する球の半径は $^{\text{イ}}\boxed{}$ である。

(2)　四角錐 OABCD に外接する球の中心を E とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{AEB}$ の値は $^{\text{ウ}}\boxed{}$ である。

解答　(1)（ア）$\dfrac{8}{3}$　（イ）$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(2)（ウ）$\dfrac{1}{9}$

解説

(1)　頂点 O から底面 ABCD に垂線 OH を下ろす。



$\triangle$OAH，$\triangle$OBH，$\triangle$OCH，$\triangle$ODH はいずれも $\angle\mathrm{H}=90^\circ$ の直角三角形であり

　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$，OH は共通

であるから

　$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}\equiv\triangle\mathrm{ODH}$

よって　$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$

四角形 ABCD は正方形であるから，H は正方形 ABCD の対角線の交点である。

ゆえに　$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$

$\triangle$OAH は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$$

したがって，四角錐 OABCD の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}\cdot2^2\cdot2={}^{\text{ア}}\dfrac{8}{3}$

内接する球の中心を I とする。4 つの四面体 IOAB，IOBC，IOCD，IODA は合同であるから

　$V=4\times$(四面体 IOAB の体積)$+$(四角錐 IABCD の体積)

$\triangle$OAB は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ の二等辺三角形であるから，底辺を AB とすると，高さは

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\sqrt{5}$$

よって　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}$

したがって，内接球の半径を r とすると

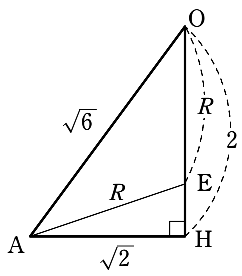
$$\frac{8}{3}=4\times\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5}\cdot r\right)+\frac{1}{3}\cdot2^2\cdot r$$

ゆえに　$\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}(\sqrt{5}+1)r$

これを解いて　$r={}^{\text{イ}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2)　E は線分 OH 上の点である。

外接球の半径を R とおくと $\triangle$AEH において，三平方の定理より



$$R^2=(2-R)^2+(\sqrt{2})^2$$

よって　$R=\dfrac{3}{2}$

$\triangle$ABE において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{AEB}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2}{2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}={}^{\text{ウ}}\frac{1}{9}$$

$\boxed{12}$

3 辺の長さが，$a-2$，a，$a+2$ である三角形について考える。

(1)　この三角形が鈍角三角形であるとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最大角が 150° であるとき，この三角形の外接円の半径を求めよ。

解答　(1)　$4<a<8$　　(2)　$3\sqrt{3}+1$

解説

(1)　$a-2<a<a+2$ であるから，三角形の成立条件により　$a+2<(a-2)+a$

よって　$a>4$　……①

このとき，3 辺の長さはすべて正である。

また，三角形の最大角は，最大の辺に対する角である。

すなわち，鈍角となりうるのは，長さが $a+2$ の辺に対する角である。

よって，この三角形が鈍角三角形であるための条件は　$(a-2)^2+a^2<(a+2)^2$

整理して　$a^2-8a<0$

すなわち　$a(a-8)<0$

よって　$0<a<8$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$4<a<8$

(2)　長さ $a+2$ の辺に対する角が 150° であるから，余弦定理により

$$(a+2)^2=(a-2)^2+a^2-2\cdot(a-2)\cdot a\cos150^\circ$$

整理すると　$a\{(\sqrt{3}+1)a-2(4+\sqrt{3})\}=0$

$a\neq0$ であるから

$$a=\frac{2(4+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(4+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3\sqrt{3}-1$$　（これは $4<a<8$ を満たす）

また，外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{a+2}{\sin150^\circ}=2R$

よって　$R=\dfrac{a+2}{2\sin150^\circ}=\dfrac{(3\sqrt{3}-1)+2}{2\cdot\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}+1$

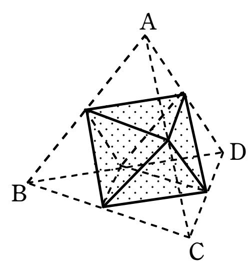
$\boxed{13}$

体積が 1 の正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}$

解説

右の図のように，正八面体は，正四面体 ABCDから正四面体を 4 つ取り除いたものである。



正四面体 ABCD と取り除く正四面体は相似であり，その相似比は　2：1

したがって，体積比は　$2^3:1^3=8:1$

よって，正八面体の体積は　$1-\dfrac{1}{8}\times4=\dfrac{1}{2}$

14

円 O に内接する四角形 ABCD がある。$AB=m$，AB：BC：DA＝1：2：3，$CD<BC$，$\angle ABC=120°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 対角線 AC の長さを m を用いて表せ。

(2) 円 O の半径を m を用いて表せ。

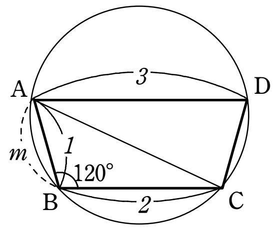
(3) 辺 CD の長さを m を用いて表せ。

(4) 辺 BC と辺 DA が平行であることを示せ。

解答 (1) $\sqrt{7}\,m$ (2) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}m$ (3) m (4) 略

解説

(1) $AB=m$，AB：BC：DA＝1：2：3 から $BC=2m$，$DA=3m$ である。



△ABC において，余弦定理により

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 120°$$
$$=m^2+(2m)^2-2\cdot m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=7m^2$$

$AC>0$，$m>0$ であるから　$AC=\sqrt{7}\,m$

(2) 円 O の半径を R とする。

円 O は △ABC の外接円であるから，△ABC において，正弦定理により

$$\frac{AC}{\sin 120°}=2R$$

よって　$R=\dfrac{AC}{2\sin 120°}=\dfrac{\sqrt{7}\,m}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}m$

(3) 四角形 ABCD は円に内接するから　$\angle ADC=180°-\angle ABC=60°$

$CD=x$ とすると，△ACD において余弦定理により

$$AC^2=CD^2+DA^2-2\cdot CD\cdot DA\cdot\cos 60°$$

すなわち　$(\sqrt{7}\,m)^2=x^2+(3m)^2-2\cdot x\cdot 3m\cdot\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$x^2-3mx+2m^2=0$

よって　$(x-m)(x-2m)=0$

$CD<BC$ であるから　$x<2m$

したがって　$x=CD=m$

(4) (3) より　$AB=CD$

よって，長さの等しい弧に対する円周角は等しいから　$\angle ACB=\angle CAD$

錯角が等しいから　$BC /\!/ DA$

15

4 個の値からなるデータ 4，3，7，6 に 2 個の値を追加する。追加後のデータは追加前のデータと比べると，平均値は変わらなかったが，分散は 4.5 だけ増加した。追加された 2 個の値は，ア［　］と イ［　］である。ただし，ア［　］＜イ［　］とする。

解答 (ア) 1 (イ) 9

解説

4 個のデータの平均値は　$\dfrac{1}{4}(4+3+7+6)=5$

4 個のデータの分散は　$\dfrac{1}{4}\{(4-5)^2+(3-5)^2+(7-5)^2+(6-5)^2\}=\dfrac{10}{4}=2.5$

追加する 2 個の値を a，b とする。

追加後のデータの平均値は 5 であるから

$$\frac{1}{6}(20+a+b)=5$$

すなわち　$a+b=10$　　よって　$b=-a+10$ ……①

追加後のデータの分散は $2.5+4.5=7$ であるから

$$\frac{1}{6}\{10+(a-5)^2+(b-5)^2\}=7$$

① を代入して　$\dfrac{1}{6}\{10+(a-5)^2+(-a+5)^2\}=7$

すなわち　$2(a-5)^2=32$

ゆえに　$a-5=\pm 4$　　よって　$a=9,\ 1$

$a=9$ のとき，① から　$b=1$

$a=1$ のとき，① から　$b=9$

したがって，追加された 2 個の値は　ア1 と イ9

16

ある集団は A と B の 2 つのグループで構成される。データを集計したところ，それぞれのグループの個数，平均値，分散は右の表のようになった。

グループ	個数	平均値	分散
A	20	16	24
B	60	12	28

このとき，集団全体の平均値は ア［　］，

分散は イ［　］である。

解答 (ア) 13 (イ) 30

解説

集団全体の平均値は　$\dfrac{1}{80}(20\times 16+60\times 12)=\dfrac{1}{8}(32+72)=$ ア13

グループ A の値の 2 乗の平均を a とすると

$a-16^2=24$　　よって　$a=280$

グループ B の値の 2 乗の平均を b とすると

$b-12^2=28$　　ゆえに　$b=172$

よって，集団全体の値の 2 乗の和は　$280\times 20+172\times 60=15920$

ゆえに，集団全体の分散は　$\dfrac{15920}{80}-13^2=199-169=$ イ30

$\boxed{17}$

次の条件を満たす三角形 ABC はそれぞれどのような三角形か。ただし，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ c，a，b で表し，∠ABC，∠BCA，∠CAB の大きさをそれぞれ B，C，A で表す。

(1) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$　　　　(2) $\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}$

解答　(1) $a=b$ の二等辺三角形

(2) $a=b$ の二等辺三角形 または $C=90^\circ$ の直角三角形

解説

(1) △ABC において，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$ に代入して　　$a\cdot\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=b\cdot\dfrac{2ca}{c^2+a^2-b^2}$

すなわち　　$\dfrac{2abc}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2abc}{c^2+a^2-b^2}$

$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$ であるから　　$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2$

整理して　　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　　$a=b$

よって，△ABC は $a=b$ の二等辺三角形である。

注意　このとき，$A\neq 90^\circ$，$B\neq 90^\circ$ であるから，$\cos A\neq 0$，$\cos B\neq 0$ を満たす。

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ を $\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}$ に代入して

$$\frac{2b^2c}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2ca^2}{c^2+a^2-b^2}$$

$c\neq 0$ であるから　　$b^2(c^2+a^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$

$\iff a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$

$\iff (a^2-b^2)c^2-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$

$\iff (a+b)(a-b)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$

$a+b>0$ であるから　　$a=b$ または $c^2=a^2+b^2$

よって，△ABC は $a=b$ の二等辺三角形または $C=90^\circ$ の直角三角形である。

$\boxed{18}$

変量 x の大きさ 5 のデータ

34，26，30，38，32

の平均値は 32，分散は 16 である。このとき新しい変量 $y=-3x+20$ の平均値は $-$ア$\boxed{}$，標準偏差は イ$\boxed{}$ である。

解答　(ア) 76　　(イ) 12

解説

$\overline{x}=32$，$s_x{}^2=16$，$y=-3x+20$ より

$$\overline{y}=-3\overline{x}+20=-3\cdot 32+20=-{}^{ア}76,\ s_y=|-3|s_x=3\cdot\sqrt{16}={}^{イ}12$$

2月25日(水)中2甲陽コンプリート数学　定期試験対策　　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　】

1

ある変量のデータが 2，13，10，5，8，x であるとする。

(1)　$x=4$ であるとき，データの分散は ア$\boxed{}$ である。

(2)　データの中央値が 7 であるとき，$x=$ イ$\boxed{}$ である。

(3)　データの平均値と中央値が等しくなるような x の値は ウ$\boxed{}$ 個ある。また，データの平均値と中央値が等しくなるような x の値のうち最大のものは エ$\boxed{}$ である。

2

あるタワーが立っている地点 K と同じ標高の地点 A からタワーの先端の仰角を測ると 30° であった。また，地点 A から AB＝114 (m) となるところに地点 B があり，∠KAB＝75° および ∠KBA＝60° であった。このとき，AK の距離は ア$\boxed{}$ m，タワーの高さは イ$\boxed{}$ m である。

3

市長選挙に X，Y の 2 人が立候補した。有権者から無作為に 20 人を選んで調べたところ X の支持者が 15 人とわかった。この調査から，X の方が支持者が多いと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を 0.05 として考察せよ。ただし，公正なコインを 20 回投げて表の出た回数を記録する実験を 200 セット行ったところ，次のようになったとし，この結果を用いよ。

表の回数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	計
度数	1	5	9	16	28	38	35	30	25	9	2	1	1	200

4

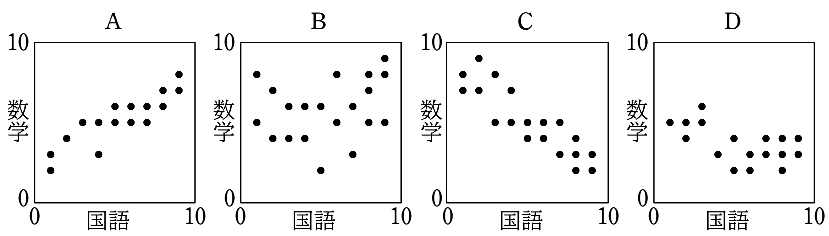
右の表は，あるクラスの生徒 5 人に対して行われた，それぞれ 10 点満点の国語と数学のテストの得点をまとめたものである。

生徒番号	①	②	③	④	⑤	平均	分散
国語	8	4	2	6	10	a	b
数学	5	6	7	4	3	5	2

(1)　a，b の値をそれぞれ求めよ。

(2)　国語と数学の得点の相関係数を求めよ。

(3)　次に示す 4 つの散布図は，同じテストを行った他のクラスの国語と数学の得点の散布図である。ただし，生徒の人数は異なる。相関係数が (2) で求めた値に最も近い散布図を選べ。



$\boxed{5}$

円 O に内接する四角形 ABCD において，$\angle \mathrm{ADC}=\theta$ とする。$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CD}=4$，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　対角線 AC と辺 AD の長さを求めよ。

(2)　対角線 BD の長さを求めよ。

(3)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

$\boxed{6}$

$\triangle \mathrm{ABC}$ において $\dfrac{\sin A}{6}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$ が成り立っている。

(1)　$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

(2)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の内接円の半径が 1 であるとき，AB の長さ，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積，$\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ。

$\boxed{7}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たす二等辺三角形 ABC を考える。D を AB の中点とし，$\angle \mathrm{ACD}=\alpha$，$\angle \mathrm{BCD}=\beta$ とする。

(1)　$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，CE$=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle$DAE を t を用いて表せ。

(3)　△ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

$\boxed{9}$

次の変量 x のデータについて，以下の問いに答えよ。

514，584，598，521，605，612，577

(1)　$y=x-570$ とおくことにより，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2)　$u=\dfrac{x-570}{7}$ とおくことにより，変量 x のデータの分散を求めよ。

$\boxed{10}$

変量 x の大きさ 50 のデータの中央値は 56，四分位偏差は 15 である。このとき新しい変量 $y=2x-20$ のデータの中央値は ア$\boxed{}$，四分位偏差は イ$\boxed{}$ である。

$\boxed{11}$

四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さが 2 の正方形で，辺 OA，OB，OC，OD の長さは $\sqrt{6}$ であるとする。

(1) 四角錐 OABCD の体積は ア$\boxed{}$，四角錐 OABCD に内接する球の半径は イ$\boxed{}$ である。

(2) 四角錐 OABCD に外接する球の中心を E とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{AEB}$ の値は ウ$\boxed{}$ である。

$\boxed{12}$

3 辺の長さが，$a-2$，a，$a+2$ である三角形について考える。

(1) この三角形が鈍角三角形であるとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

(2) この三角形の最大角が 150° であるとき，この三角形の外接円の半径を求めよ。

$\boxed{13}$

体積が 1 の正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。

$\boxed{14}$

円 O に内接する四角形 ABCD がある。$AB=m$，AB：BC：DA＝1：2：3，CD＜BC，$\angle ABC=120°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 対角線 AC の長さを m を用いて表せ。

(2) 円 O の半径を m を用いて表せ。

(3) 辺 CD の長さを m を用いて表せ。

(4) 辺 BC と辺 DA が平行であることを示せ。

$\boxed{15}$

4 個の値からなるデータ 4，3，7，6 に 2 個の値を追加する。追加後のデータは追加前のデータと比べると，平均値は変わらなかったが，分散は 4.5 だけ増加した。追加された 2 個の値は，ア$\boxed{}$ と イ$\boxed{}$ である。ただし，ア$\boxed{}$ ＜ イ$\boxed{}$ とする。

$\boxed{16}$

ある集団は A と B の 2 つのグループで構成される。データを集計したところ，それぞれのグループの個数，平均値，分散は右の表のようになった。

グループ	個数	平均値	分散
A	20	16	24
B	60	12	28

このとき，集団全体の平均値は ア$\boxed{}$，

分散は イ$\boxed{}$ である。

$\boxed{17}$

次の条件を満たす三角形 ABC はそれぞれどのような三角形か。ただし，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ c，a，b で表し，∠ABC，∠BCA，∠CAB の大きさをそれぞれ B，C，A で表す。

(1) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$　　(2) $\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}$

$\boxed{18}$

変量 x の大きさ 5 のデータ

34，26，30，38，32

の平均値は 32，分散は 16 である。このとき新しい変量 $y=-3x+20$ の平均値は $-$ ア$\boxed{}$，標準偏差は イ$\boxed{}$ である。