1

(解説)

(1)　$\dfrac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

(2)　$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(\sqrt{2}+1)$$

$\boxed{2}$

(解説)

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)xdx+\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

ここで，$I_1=\int_0^1 x^2dx$，$I_2=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)xdx$，$I_3=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ とおく。

$$I_1=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

I_2 について，$\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと　$x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to \sqrt{2}$

よって　$I_2=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t}+\frac{t^2-1}{t^3}\right)t\,dt=\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$=\left[2t+\frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}-3$$

I_3 について，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

よって　$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\tan^2\theta\cdot(\cos^2\theta)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cdot\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

したがって，求める定積分は

$$I_1+I_2+I_3=\frac{1}{3}+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}-3\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　B の得点が 1 となるのは，1 回目に 1 か 2 の札を取り出し，2 回目に 1 の札を取り出す場合であるから，その確率は　$\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{n^2}$

B の得点が 2 となる確率も，同様にして　$\dfrac{2}{n^2}$

B の得点が m $(3\leqq m\leqq n)$ となるのは，1 回目に m の札を取り出すか，または 1 回目に 1 か 2 の札を取り出し，2 回目に m の札を取り出す場合である。

この場合の確率は　$\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+2}{n^2}$

以上から，求める確率は

$$m=1,\ 2 \text{ のとき } \frac{2}{n^2},\qquad 3\leqq m\leqq n \text{ のとき } \frac{n+2}{n^2}$$

(2)　B の得点を m とする。

$m=1$ のとき，(A の得点)<(B の得点) となることはない。

$m=2$ のとき，(A の得点)<(B の得点) となるのは，A が 1 の札を取り出し，かつ B の得点が 2 となる場合である。

この場合の確率は　$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n^2}=\dfrac{2}{n^3}$

$3\leqq m\leqq n$ のとき，(A の得点)<(B の得点) となるのは，A が 1，2，……，$m-1$ のいずれかの札を取り出し，かつ B の得点が m となる場合である。

この場合の確率は　$\dfrac{m-1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n^2}=\dfrac{n+2}{n^3}(m-1)$

よって，求める確率 p_n は

$$\begin{aligned}
p_n&=\frac{2}{n^3}+\sum_{m=3}^{n}\frac{n+2}{n^3}(m-1)=\frac{2}{n^3}+\frac{n+2}{n^3}\sum_{m=3}^{n}(m-1)\\
&=\frac{2}{n^3}+\frac{n+2}{n^3}\cdot\frac{(n-2)}{2}\{2+(n-1)\}=\frac{1}{2n^3}\{4+(n+1)(n^2-4)\}\\
&=\frac{n^3+n^2-4n}{2n^3}=\frac{n^2+n-4}{2n^2}
\end{aligned}$$

4

(解説)

2 個のさいころの目を a，b とすると，a，b の値に対する積 ab の値は，次の表のようになる。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

2 個のさいころの目の出方の総数は　$6^2=36$ (通り)

(1)　ab を 2 で割った余りが 1，すなわち奇数になるのは，a，b がいずれも奇数のときである。

このような a，b の組は　$3^2=9$ (通り)

よって　$P_2=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

また，ab を 3 で割った余りが 1 になるのは，ab の値が 1，4，10，16，25 のいずれかの場合である。

このような a，b の組は

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1),\ (2,\ 5),\ (5,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5)$

の 8 通りあるから　$P_3=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

更に，ab を 4 で割った余りが 1 になるのは，ab の値が 1，5，9，25 のいずれかの場合である。

このような a，b の組は

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (3,\ 3),\ (5,\ 5)$

の 5 通りあるから　$P_4=\dfrac{5}{36}$

(2)　$1 \leqq ab \leqq 36$ であるから，$n \geqq 36$ のとき，ab を n で割った余りが 1 になるのは $ab=1$ のときである。

このような a，b の組は $(a,\ b)=(1,\ 1)$ の 1 通りであるから　$P_n=\dfrac{1}{36}$

(3)　(1)，(2) から，$5 \leqq n \leqq 35$ の範囲で考える。

$P_n=\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{36}$ となるのは，「ab を n で割った余りが 1」……① を満たす a，b の組

がちょうど2通りあるときである。

ここで，$(a,\ b)=(1,\ 1)$ は n の値に関係なく ① を満たす。

また，$(a,\ b)=(a_0,\ b_0)$ $(a_0 \neq b_0)$ が ① を満たすと仮定すると，$(a,\ b)=(b_0,\ a_0)$ も ① を満たすから，① を満たす a，b の組は少なくとも3通り存在することになる。

よって，① を満たす a，b の組で，$(a,\ b)=(1,\ 1)$ 以外のものは

$$(a,\ b)=(2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$$

のいずれかでなければならない。

ただし，$(a,\ b)=(4,\ 1)$ のとき $ab=4=2^2$ であるから，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 2)$ のみが ① を満たす a，b の組となるような n は存在しない。

[1] $(a,\ b)=(1,\ 1),\ (3,\ 3)$ …… ② のみが ① を満たす a，b の組となるような n について調べる。

$3^2=9$ を n $(5 \leqq n \leqq 35)$ で割ったときの余りが1となるのは，$n=8$ のときである。

ただし，$n=8$ のとき，① を満たす a，b の組は ② 以外に $(a,\ b)=(5,\ 5)$ がある。

よって，$n=8$ は不適。

[2] $(a,\ b)=(1,\ 1),\ (4,\ 4)$ …… ③ のみが ① を満たす a，b の組となるような n について調べる。

$4^2=16$ を n $(5 \leqq n \leqq 35)$ で割ったときの余りが1となるのは，$n=5,\ 15$ のときである。

$n=5$ のとき，① を満たす a，b の組は ③ 以外に $(a,\ b)=(1,\ 6)$ がある。

よって，$n=5$ は不適。

$n=15$ のとき，① を満たす a，b の組は ③ 以外に存在しない。

ゆえに，$n=15$ は適する。

[3] $(a,\ b)=(1,\ 1),\ (5,\ 5)$ …… ④ のみが ① を満たす a，b の組となるような n について調べる。

$5^2=25$ を n $(5 \leqq n \leqq 35)$ で割ったときの余りが1となるのは，$n=6,\ 8,\ 12,\ 24$ のときである。

$n=8$ のとき，① を満たす a，b の組は ④ 以外に $(a,\ b)=(3,\ 3)$ がある。

よって，$n=8$ は不適。

$n=6,\ 12,\ 24$ のとき，① を満たす a，b の組は ④ 以外に存在しない。

ゆえに，$n=6,\ 12,\ 24$ は適する。

[4] $(a,\ b)=(1,\ 1),\ (6,\ 6)$ …… ⑤ のみが ① を満たす a，b の組となるような n について調べる。

$6^2=36$ を n $(5 \leqq n \leqq 35)$ で割ったときの余りが1となるのは，$n=5,\ 7,\ 35$ のときである。

$n=5$ のとき，① を満たす a，b の組は ⑤ 以外に $(a,\ b)=(1,\ 6)$ がある。

よって，$n=5$ は不適。

$n=7$ のとき，① を満たす a，b の組は ⑤ 以外に $(a,\ b)=(2,\ 4)$ がある。

ゆえに，$n=7$ は不適。

$n=35$ のとき，① を満たす a，b の組は ⑤ 以外に存在しない。

よって，$n=35$ は適する。

以上から，求める n の値は

$$n=6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　点 $(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2+t^2 \leqq 6,\ s+t=2,\ st=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす実数 s，t が存在することである。

$s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ から，s，t は u の 2 次方程式 $u^2-2u+\sqrt{2}=0$　$\cdots\cdots$ ② の 2 つの解である。

② の判別式を D とおくと　　$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}<0$

よって，② は実数解をもたない。

ゆえに，① を満たす実数 s，t は存在しない。

したがって，$(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 A の点であるための条件は

$$s^2+t^2 \leqq 6,\ s+t=x,\ st=y$$

を満たす実数 s，t が存在することである。

$s^2+t^2 \leqq 6$ から　　$(s+t)^2-2st \leqq 6$

$s+t=x$，$st=y$ を代入して　　$x^2-2y \leqq 6$

すなわち　　$y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-3$　$\cdots\cdots$ ③

$s+t=x$，$st=y$ から，s，t は u の 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の 2 つの解である。

この方程式の判別式を D とすると　　$D=x^2-4y$

s，t が実数であるとき，$D \geqq 0$ であるから　　$x^2-4y \geqq 0$

すなわち　　$y \leqq \dfrac{1}{4}x^2$　$\cdots\cdots$④

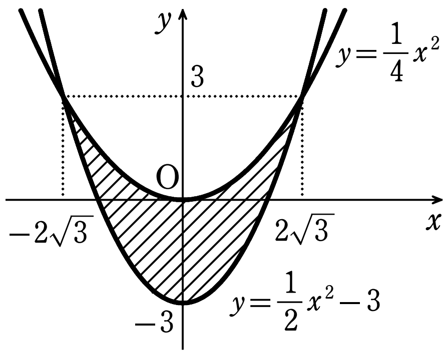
③，④ から，領域 A 上の点 $(x,\ y)$ が満たす

不等式は　$\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-3 \\ y \leqq \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$

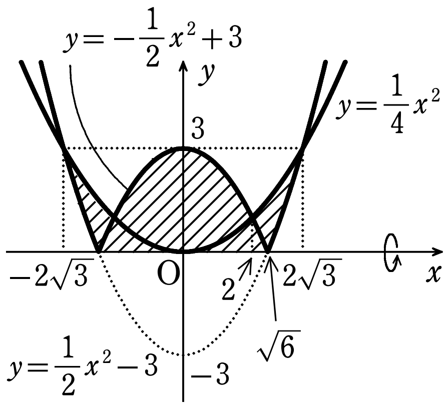
$\dfrac{1}{2}x^2-3=\dfrac{1}{4}x^2$ とすると　　$x=\pm 2\sqrt{3}$

よって，領域 A は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(3)　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ の x 軸より下側の部分を，x 軸に関して対称に折り返すと右の図のようになり，求める回転体の体積は，右の図の斜線部分を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積である。



このとき，折り返してできる放物線

$y=-\frac{1}{2}x^2+3$ と放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ の交点の x 座標は，$-\frac{1}{2}x^2+3=\frac{1}{4}x^2$ を解いて　　$x=\pm 2$

領域 A は y 軸に関して対称であるから，求める体積を V とすると

$$V=2\left\{\pi\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx+\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx-\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx\right\}$$

$$=2\pi\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx+2\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{1}{16}x^4\,dx-2\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{20}x^5-x^3+9x\right]_0^2+2\pi\left[\frac{1}{80}x^5\right]_2^{2\sqrt{3}}-2\pi\left[\frac{1}{20}x^5-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{112-48\sqrt{3}+48\sqrt{6}}{5}\pi$$