$\boxed{1}$

$1<a<b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a}-\frac{1}{\log b}<\frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

解答　略

解説

$f(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とすると，$x>1$ において $f(x)$ は微分可能であり　$f'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

$1<a<b$ であるから，平均値の定理により，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b)$$

すなわち　$\dfrac{1}{\log b}-\dfrac{1}{\log a}=f'(c)(b-a)\quad (a<c<b)$

を満たす実数 c が存在する。

ここで，$x(\log x)^2$ は $x>1$ において単調に増加するから，$f'(x)$ も $x>1$ において単調に増加する。

よって，$1<a<c<b$ のとき　$f'(a)<f'(c)$

ゆえに　$\dfrac{1}{\log b}-\dfrac{1}{\log a}=f'(c)(b-a)>f'(a)(b-a)=-\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$

したがって　$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$

$\boxed{2}$

x に関する方程式 $(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

ただし，a は定数であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ とする。

解答　$a>2e^2$ のとき0個；$a=2e^2$，$a<-\dfrac{6}{e^2}$ のとき1個；

$a=-\dfrac{6}{e^2}$，$0\leqq a<2e^2$ のとき2個；$-\dfrac{6}{e^2}<a<0$ のとき3個

解説

方程式を変形すると　$(-x^2-2x+2)e^{-x}=a$

$f(x)=(-x^2-2x+2)e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=(-2x-2)e^{-x}-(-x^2-2x+2)e^{-x}=(x+2)(x-2)e^{-x}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm2$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2e^2$	$\searrow$	$-\dfrac{6}{e^2}$	$\nearrow$

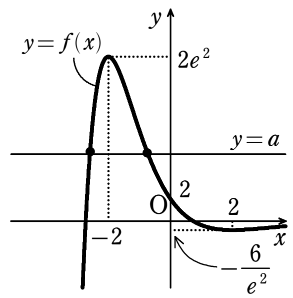
また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$$

$x=-t$ とおくことにより

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}(-t^2+2t+2)e^t=\lim_{t\to\infty}t^2e^t\left(-1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}\right)=-\infty$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数を調べて

$a>2e^2$ のとき0個；

$a=2e^2$，$a<-\dfrac{6}{e^2}$ のとき1個；

$a=-\dfrac{6}{e^2}$，$0\leqq a<2e^2$ のとき2個；

$-\dfrac{6}{e^2}<a<0$ のとき3個

$\boxed{3}$

点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a\leqq0$，$2\log2+\dfrac{3}{2}\leqq a$

解説

$y'=-e^{-x}+2e^{-2x}$

曲線上の点 $(t,\ e^{-t}-e^{-2t})$ における接線の方程式は

$$y-(e^{-t}-e^{-2t})=(-e^{-t}+2e^{-2t})(x-t)$$

すなわち　$y=(-e^{-t}+2e^{-2t})x+t(e^{-t}-2e^{-2t})+(e^{-t}-e^{-2t})$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通るから　$0=(-e^{-t}+2e^{-2t})a+t(e^{-t}-2e^{-2t})+(e^{-t}-e^{-2t})$

両辺に e^{2t} を掛けて整理すると　$(e^t-2)a=t(e^t-2)+(e^t-1)$　……①

$e^t-2=0$ とすると　$e^t=2$　すなわち　$t=\log2$

このとき，① の右辺は　$t(e^t-2)+(e^t-1)=(2-2)\log2+(2-1)=1$

よって，① は $0=1$ となるから不適。

したがって，$e^t-2\fallingdotseq0$ より

$$a=\frac{t(e^t-2)+(e^t-1)}{e^t-2}=\frac{(t+1)(e^t-2)+1}{e^t-2}$$

すなわち　$a=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$　……②

この方程式が実数解をもつ条件は，$y=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ $(t\fallingdotseq\log2)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつことである。

$f(t)=t+1+\dfrac{1}{e^t-2}$ $(t\fallingdotseq\log2)$ とおくと

$$f'(t)=1-\frac{e^t}{(e^t-2)^2}=\frac{e^{2t}-5e^t+4}{(e^t-2)^2}=\frac{(e^t-1)(e^t-4)}{(e^t-2)^2}$$

$t\fallingdotseq\log2$ のとき，$f'(t)=0$ とすると　$e^t=1,\ 4$　すなわち　$t=0,\ 2\log2$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log2$	$\cdots$	$2\log2$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

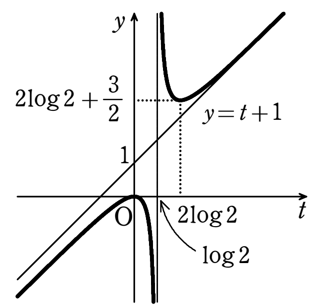
また　$f(0)=1+\dfrac{1}{1-2}=0$

$f(2\log2)=2\log2+1+\dfrac{1}{4-2}=2\log2+\dfrac{3}{2}$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$，

$\displaystyle\lim_{t\to\log2+0}f(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\log2-0}f(t)=-\infty$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。



したがって，② が実数解をもつ，すなわち接線が存在するような a の値の範囲は　$a\leqq0$，$2\log2+\dfrac{3}{2}\leqq a$

2月25日(水)　高1数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　】　　　　　　　　　　　　点/10点

$\boxed{1}$

$1 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

$\boxed{2}$

x に関する方程式 $(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

ただし，a は定数であり，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ とする。

$\boxed{3}$

点 $(a,\ 0)$ を通り，曲線 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。