$\boxed{1}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ があり，2 次方程式 $15x^2+ax+12=0$ の 2 つの解が $\cos\theta$，$\tan\theta$ であるとする。このとき，a の値を求めよ。

$\boxed{2}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $f(x)=\cos^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{3}$

半径 1 の円の周上に 4 点 A，B，C，D がこの順にあり，弧 AB，弧 BC，弧 CD，弧 DA の長さがそれぞれ $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また，直線 AC と直線 BD の交点を P とする。

(1)　線分 AB の長さを求めよ。

(2)　$\angle$APB の大きさを求めよ。

(3)　線分 AP の長さを求めよ。

$\boxed{4}$

$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，原点と点 $\mathrm{P}_k(k,\ 2)$ を通る直線が x 軸となす鋭角を θ_k とする。

(1)　$\tan\theta_k$ を求めよ。

(2)　m，n を正の整数とするとき，$\theta_m+\theta_n=\dfrac{\pi}{4}$ が成り立つ m，n の組 $(m,\ n)$ で $m\leqq n$ を満たすものをすべて求めよ。

$\boxed{5}$

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(2)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，θ の方程式 $2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)-k=0$ の解の個数を，定数 k が次の 2 つの値の場合について調べよ。

$$k=1,\quad k=-1.9$$

$\boxed{6}$

$f(x)=27^x+27^{-x}-9^x-9^{-x}+3^x+3^{-3}-14$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1) で考えた t について，$f(x)$ を t を用いて表せ。

(3)　$f(x)=0$ を満たす正の実数 x をすべて求めよ。

$\boxed{7}$

$\log_{10}2+\log_{10}3$ は無理数であることを証明せよ。

$\boxed{8}$

$A=12^{60}$ とする。

(1)　A の一の位の数字を答えよ。

(2)　A は何桁の整数か。また，A の最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

$\boxed{9}$

x についての方程式 $4^x+2k\cdot 2^x+2k^2+k-6=0$ が正の解と負の解を 1 つずつもつような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$

不等式 $\log_{4-x^2-y^2}(y-x)<0$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域を図示せよ。

$\boxed{1}$

解答　$a=-29$

$\boxed{2}$

解答　$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 3，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\sqrt{2}$　　(2)　$\dfrac{7}{12}\pi$　　(3)　$\sqrt{3}-1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\tan\theta_k=\dfrac{2}{k}$　　(2)　$(m,\ n)=(3,\ 10),\ (4,\ 6)$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$　　(2)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$k=1$ のとき 1 個，$k=-1.9$ のとき 3 個

$\boxed{6}$

解答　(1)　$t\geqq 2$　　(2)　$f(x)=t^3-t^2-2t-12$　　(3)　$x=\log_3\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{7}$

解答　略

$\boxed{8}$

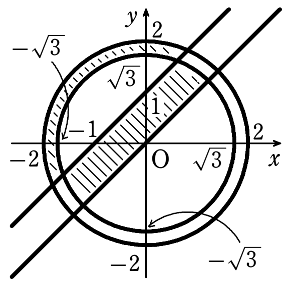
解答　(1)　6　　(2)　65 桁，最高位の数字は 5

$\boxed{9}$

解答　$-\dfrac{5}{2}<k<-2$

$\boxed{10}$

解答　〔図〕，境界線を含まない



$\boxed{1}$

解説

解と係数の関係から　　$\cos\theta+\tan\theta=-\dfrac{a}{15}$　$\cdots\cdots$ ①,

$\cos\theta\tan\theta=\dfrac{12}{15}$　$\cdots\cdots$ ②

② から　　$\cos\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}$　　　よって　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ であるから　　$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

よって　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}$

① に代入して　　$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{3}=-\dfrac{a}{15}$

これを解くと　　$a=-29$

$\boxed{2}$

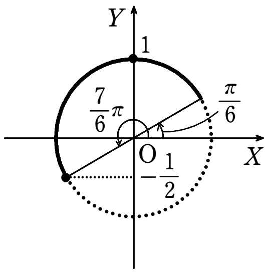
解説

$$f(x)=\cos^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x$$
$$=\frac{1+\cos 2x}{2}+4\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2}-3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x-1=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ であるから

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$$



よって

$$-3\leqq 4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1\leqq 3$$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{6}\pi$ より

$$x=\frac{\pi}{2}$$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき，$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ より　　$x=\dfrac{\pi}{6}$

ゆえに，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 3，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -3　をとる。

3

解説

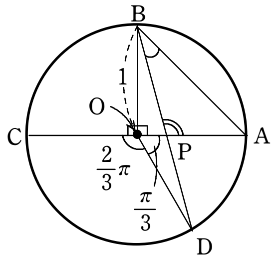
(1)　半径が 1 である扇形において，弧の長さは中心角の大きさと等しい。

よって，円の中心を O とすると

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに，△AOB は直角二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{2}\,\mathrm{OB}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$$



(2)　$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$ であるから，3 点 A，O，C はこの順に一直線上にあり，線分 AC は円の直径である。

ここで，円周角の定理により

$$\angle\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

また，(1) より　　$\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，△ABP において

$$\angle\mathrm{APB}=\pi-(\angle\mathrm{ABP}+\angle\mathrm{BAP})$$
$$=\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{12}\pi$$

(3)　△ABP において，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{7}{12}\pi}$$

ここで，$\dfrac{7}{12}\pi=\dfrac{4}{12}\pi+\dfrac{3}{12}\pi=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

よって　　$\mathrm{AP}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\frac{7}{12}\pi}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$$

4

解説

(1)　原点と点 $\mathrm{P}_k(k,\ 2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{2}{k}$ であるから

$$\tan\theta_k=\frac{2}{k}$$

(2)　$\tan(\theta_m+\theta_n)=\dfrac{\tan\theta_m+\tan\theta_n}{1-\tan\theta_m\tan\theta_n}=\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{n}}{1-\dfrac{2}{m}\cdot\dfrac{2}{n}}$

$$=\frac{2m+2n}{mn-4}$$

$\theta_m+\theta_n=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\tan(\theta_m+\theta_n)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ であるから

$$\frac{2m+2n}{mn-4}=1$$

よって　$mn-4=2m+2n$

すなわち　$(m-2)(n-2)=8$　…… ①

また，$1\leqq m\leqq n$ から　$-1\leqq m-2\leqq n-2$

これと ① を満たす整数 $m-2$，$n-2$ の組は

$$(m-2,\ n-2)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$$

したがって　$(m,\ n)=(3,\ 10),\ (4,\ 6)$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗して

$$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

すなわち　$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

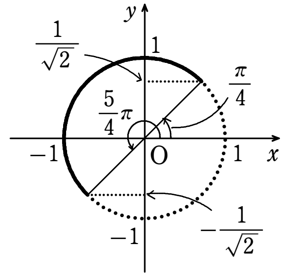
よって，右の図より

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$$

ゆえに

$$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

したがって　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$



(3)　(1) から，方程式は　$2\cdot\dfrac{t^2-1}{2}-2t-k=0$

すなわち　$t^2-2t-1=k$　…… ①

$f(t)=t^2-2t-1$ とおくと，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の t 座標が，方程式 ① の解である。

ここで，t が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲を動くときの，θ の方程式 $\sin\theta+\cos\theta=t$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の解の個数について調べる。

右の図より，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

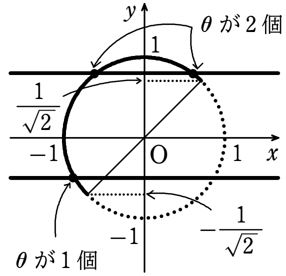
または $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

すなわち，

$-1\leqq t<1$ または $t=\sqrt{2}$

のとき，解 θ は 1 個存在する。

また，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<1$ すなわち，$1\leqq t<\sqrt{2}$



のとき，解 θ は2個存在する。

ここで　$f(t)=(t-1)^2-2$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

$k=1$ のとき，右の図より，方程式 ① の解は

$-1\leqq t<1$ の範囲に1つだけ存在する。

よって，もとの方程式の解 θ は

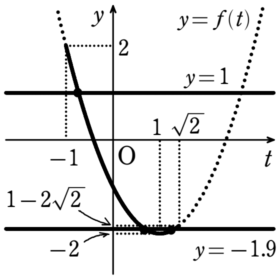
　$1\times1=1$ (個)

また，$k=-1.9$ のとき，右上の図より，方程式 ① の解は

　$-1\leqq t<1$ の範囲に1つ，　$1\leqq t<\sqrt{2}$ の範囲に1つ

だけ存在する。

よって，もとの方程式の解 θ は　$1\times1+1\times2=3$ (個)



6

解説

(1)　$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$3^x+3^{-x}\geqq2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}$$

すなわち　$t\geqq2$

等号が成り立つのは，$3^x=3^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである。

(2)　$27^x+27^{-x}=(3^x+3^{-x})^3-3\cdot3^x\cdot3^{-x}(3^x+3^{-x})$ より

$$27^x+27^{-x}=t^3-3t$$

また，$9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot3^x\cdot3^{-x}$ より

$$9^x+9^{-x}=t^2-2$$

よって　$f(x)=(t^3-3t)-(t^2-2)+t-14$

$$=t^3-t^2-2t-12$$

(3)　(1)，(2) より，$t\geqq2$ の範囲において，方程式 $t^3-t^2-2t-12=0$ の解を求める。

左辺を因数分解すると　$(t-3)(t^2+2t+4)=0$

ここで，$t^2+2t+4=0$ の判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot4=-3<0$

よって，方程式の実数解は　$t=3$

これは $t\geqq2$ を満たす。

$t=3$ のとき　$3^x+3^{-x}=3$

よって　$(3^x)^2-3\cdot3^x+1=0$

$3^x=s$ とすると，$x>0$ より　$s>1$

このとき　$s^2-3s+1=0$

$s>1$ より　$s=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　すなわち　$3^x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

したがって　$x=\log_3\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

7

解説

$\log_{10}2+\log_{10}3$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると

$$\log_{10}2+\log_{10}3=\frac{m}{n}\quad\cdots\cdots ①\qquad(\text{ただし，}m\text{，}n\text{ は互いに素である自然数})$$

と表される。

$\log_{10}2+\log_{10}3=\log_{10}6$ であるから，① より　$\log_{10}6=\dfrac{m}{n}$

よって　$6=10^{\frac{m}{n}}$　　両辺を n 乗すると　$6^n=10^m$

この両辺をそれぞれ素因数分解すると　$2^n\cdot3^n=2^m\cdot5^m$

よって，$m=n=0$ となり，m，n が自然数であることに矛盾する。

したがって，$\log_{10}2+\log_{10}3$ は無理数である。

8

解説

(1)　12の一の位の数字は　2

12^2 の一の位の数字は　$2\times2=4$

12^3 の一の位の数字は　$4\times2=8$

12^4 の一の位の数字は，$8\times2=16$ より　6

12^5 の一の位の数字は，$6\times2=12$ より　2

よって，12，12^2，12^3，12^4，12^5，…… の一の位の数字は

$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ \cdots\cdots$

ゆえに，2，4，8，6 を繰り返すことがわかる。

$60=4\times15$ であるから　$A=12^{60}=(12^4)^{15}$

したがって，A の一の位の数字は　6

別解　(合同式を利用する)

自然数 A の一の位の数字は，A を 10 で割ったときの余りと等しい。

$12\equiv2\pmod{10}$ であり　$2^4\equiv16\equiv6\pmod{10}$

よって　$(2^4)^2\equiv6^2\equiv36\equiv6\pmod{10}$

ゆえに，k を自然数とすると　$2^{4k}\equiv(2^4)^k\equiv6\pmod{10}$

したがって　$12^{60}\equiv2^{60}\equiv(2^4)^{15}\equiv6\pmod{10}$

すなわち，A の一の位の数字は　6

(2)　$\log_{10}12^{60}=60\log_{10}(2^2\times3)=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=60(2\times0.3010+0.4771)=64.746$

ゆえに　$64<\log_{10}12^{60}<65$

よって　$10^{64}<12^{60}<10^{65}$

したがって，A は 65 桁の整数である。

また，$12^{60}=10^{64.746}=10^{0.746}\times10^{64}$ であるから，$10^{0.746}$ の整数部分が 12^{60} の最高位の数字である。

ここで　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=1-0.3010=0.6990,$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3$

$=0.3010+0.4771=0.7781$

ゆえに　$\log_{10}5<0.746<\log_{10}6$

よって　$5<10^{0.746}<6$

ゆえに　$5\times10^{64}<10^{64.746}<6\times10^{64}$

よって　$5\times10^{64}<12^{60}<6\times10^{64}$

したがって，A の最高位の数字は　5

$\boxed{9}$

解説

$2^x=t$ とおくと，方程式は

$t^2+2kt+2k^2+k-6=0$ ……①

ここで，$x>0$ のとき　$2^x>1$　　すなわち　$t>1$

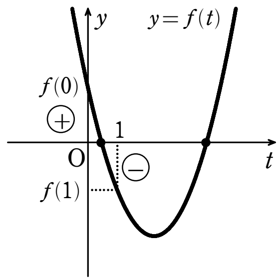
$x<0$ のとき　$0<2^x<1$　　すなわち　$0<t<1$

よって，満たすべき条件は，t の方程式 ① が

$t>1$ の範囲に 1 つ，　$0<t<1$ の範囲に 1 つ

解をもつことである。

したがって，$f(t)=t^2+2kt+2k^2+k-6$ とおくとき，$y=f(t)$ のグラフと t 軸が，$t>1$ の範囲と $0<t<1$ の範囲でそれぞれ 1 つずつ共有点をもつような k の値の範囲を求めればよい。



$y=f(t)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，右の図より，満たすべき条件は

$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$

$f(0)>0$ から　$2k^2+k-6>0$

すなわち　$(k+2)(2k-3)>0$

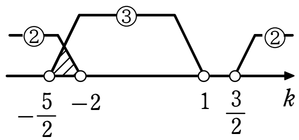
ゆえに　$k<-2,\ \dfrac{3}{2}<k$ ……②

$f(1)<0$ から　$1+2k+2k^2+k-6<0$

すなわち　$2k^2+3k-5<0$

よって　$(2k+5)(k-1)<0$

ゆえに　$-\dfrac{5}{2}<k<1$ ……③



②，③ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{5}{2}<k<-2$

$\boxed{10}$

解説

底は 1 でない正の数であるから

$0<4-x^2-y^2<1$　または　$1<4-x^2-y^2$

また，真数は正であるから　　$y-x>0$

すなわち　　$y>x$

与えられた不等式から

$$\log_{4-x^2-y^2}(y-x)<\log_{4-x^2-y^2}1 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$0<4-x^2-y^2<1$　すなわち　$3<x^2+y^2<4$ のとき

①から　　$y-x>1$　　　　すなわち　　$y>x+1$

ゆえに　$3<x^2+y^2<4$ かつ $y>x$ かつ $y>x+1$ ……②

[2]　$1<4-x^2-y^2$　すなわち　$x^2+y^2<3$ のとき

①から　　$y-x<1$　　　　すなわち　　$y<x+1$

ゆえに　$x^2+y^2<3$　かつ　$y>x$　かつ　$y<x+1$　……③

求める領域は，②または③を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の領域であるから，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。