
第 1 章

～ 数と式 ～

第1講 展開・因数分解

1 整式の加法と減法

1 整式の整理

整式は次のように整理する。

- ① 同類項を1つの項にまとめる。
- ② 1つの文字に着目して、各項を次数が低くなる順に並べて整理する。このことを、
降べきの順 に整理するという。

2 整式の乗法

1 指数法則 m, n は正の整数とする。

$$1 \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad 2 \quad (a^m)^n = a^{mn} \qquad 3 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

2 分配法則

整式 A, B, C について $A(B+C) = AB + AC, (A+B)C = AC + BC$

3 展開の公式

$$\begin{aligned} 1 \quad (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ 2 \quad (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 & 3 \quad (x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ 4 \quad (ax+b)(cx+d) &= acx^2 + (ad+bc)x + bd \end{aligned}$$

発展 3次式の展開

1 3次式の展開の公式

$$\begin{aligned} 5 \quad (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ 6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 + b^3, & (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

3 因数分解

1 因数分解の公式

$$\begin{aligned} 0 \quad AB + AC &= A(B+C) \\ 1 \quad a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2, & a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 \\ 2 \quad a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & 3 \quad x^2 + (a+b)x + ab &= (x+a)(x+b) \\ 4 \quad acx^2 + (ad+bc)x + bd &= (ax+b)(cx+d) \end{aligned}$$

2 因数分解の要領

- ① 共通な因数があればくり出す。
- ② 因数分解の公式が利用できるように式を整理する。
 - ・次数の最も低い文字について、降べきの順に式を整理する。
 - ・適当なおき換えをしたり、項の組み合わせを考える。
- ③ 因数分解の公式を利用する。

発展 3次式の因数分解

1 3次式の因数分解の公式

$$5 \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

第1講 例題

1 ★☆☆

- (1) 整式 $3x+4x^2-2-x^3$ を x について降べきの順に整理せよ。
(2) 整式 $x^2-3xy+y^3+4x-5y+1$ を x について降べきの順に整理せよ。また、 y について降べきの順に整理せよ。

2 ★☆☆

次の式を展開せよ。

- (1) $(x+4)^3$ (2) $(3a-2b)^3$
(3) $(a+5)(a^2-5a+25)$ (4) $(2x-7y)(4x^2+14xy+49y^2)$
(5) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

3 ★☆☆

次の式を因数分解せよ。

- (1) x^3+27 (2) $64p^3-27q^3$ (3) $x^3-6x^2+12x-8$

4 ★★★

次の式を因数分解せよ。

- (1) $xy-yz+zu-ux$ (2) $x^2y+y^2z-y^3-x^2z$ (3) $ab-bc-a^2c+2ac^2-c^3$

5 ★★★

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8$ (2) $2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4$

6 ★★★

次の式を因数分解せよ。

- (1) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
(2) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

7 ★★★

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^3+3xy+y^3-1$ (2) $a^3+6ab-8b^3+1$

第1講 例題演習

1

次の整式を x について降べきの順に整理せよ。また、昇べきの順に整理せよ。(3), (4) については, y についても降べきの順に整理せよ。

(1) $-3x^2 + 12x - 17 + 10x^2 - 8x + 9$ (2) $x^3 - 4x - 2x^2 - 5 + 3x + x^2 + x$

(3) $6x^2 - 4y^2 - 2xy - 3x + 4y + 1$ (4) $2y^2 + 3xy - x^2 + 2x - y + 4$

2

次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)^3$ (2) $(a+2b)^3$ (3) $(2a-5b)^3$

(4) $(x+4)(x^2-4x+16)$ (5) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

3

次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3 + 27b^3$ (2) $64x^3 - 1$ (3) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

4

次の式を因数分解せよ。

(1) $16 - 8b + 2ab - a^2$ (2) $x^2y + x^2 - y - 1$ (3) $x^2 - 2y^2 + xy + yz - zx$

5

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 - 6x - 11y + 5$ (2) $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2$

(3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x - y - 6$ (4) $2x^2 + 5xy - 3y^2 - x + 11y - 6$

6

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ (2) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$

(3) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$ (4) $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$

7

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$ (2) $x^3 + y^3 - 3xy + 1$

第1講 レベルA

1 [函館大]

次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+c)(a-b-c)$

(2) $(2x^2-x+1)(x^2+3x-3)$

(3) $(2a-5b)^3$

(4) $(x^3+x-3)(x^2-2x+2)$

(5) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$

(6) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

(7) $(1+a)(1-a^3+a^6)(1-a+a^2)$

2

次の式を展開せよ。

(1) $(t+2)^3(t-2)^3$

(2) $(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2$

3

次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2-11(x-1)+15$

(2) x^2-y^2+4y-4

(3) x^4-10x^2+9

(4) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

4

次の式を因数分解せよ。

(1) x^6-1

(2) $(x+y)^6-(x-y)^6$

(3) x^6-19x^3-216

(4) x^6-2x^3+1

5 [創価大]

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

(3) $(x+y)^4-(x-y)^4$

6

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b+16-4ab-4a^2$

(2) $x^3y+x^2-xyz^2-z^2$

(3) $6x^2-yz+2xz-3xy$

(4) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz$

7

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)x^2-2ax+a-b$

(2) $a^2+(2b-3)a-(3b^2+b-2)$

(3) $3x^2-2y^2+5xy+11x+y+6$

(4) $24x^2-54y^2-14x+141y-90$

8

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3+a^2b-a(c^2+b^2)+bc^2-b^3$

(2) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

(3) $a^2b-ab^2-b^2c+bc^2-c^2a-ca^2+2abc$

第1講 レベルB

1 [久留米大]

$a^5 - a^2b^2(a-b) - b^5$ を因数分解せよ。

2 [愛知工業大]

$ab(a+b) - 2bc(b-c) + ca(2c-a) - 3abc$ を因数分解せよ。

3

次の式を因数分解せよ。

(1) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc$

(2) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$

4 [つくば国際大]

等式 $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$ を用いて、次の式を因数分解せよ。

(1) $(y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3$

(2) $(x-z)^3 + (y-z)^3 - (x+y-2z)^3$

5

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + x^2 + 1$

(2) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

(3) $x^4 + 4$

(4) $x^4 - 27x^2y^2 + y^4$

第2講 絶対値と方程式・不等式

4 絶対値

1 数直線と絶対値

数直線上で、実数 a に対応する点と原点との距離を a の絶対値 といひ、記号 $|a|$ で表す。

$$a \geq 0 \text{ のとき } |a| = a, \quad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

5 不等式の性質

1 不等式の性質

$$A < B \text{ ならば } A + C < B + C, \quad A - C < B - C$$

$$A < B, \quad C > 0 \text{ ならば } AC < BC, \quad \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$$

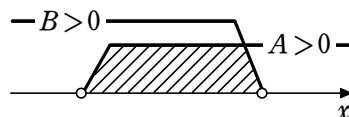
$$A < B, \quad C < 0 \text{ ならば } AC > BC, \quad \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$$

2 1次不等式の解き方

- ① 移項して、 $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$ の形に整理する。
- ② 両辺を x の係数 a で割る。 $a < 0$ のときは不等号の向きが変わるので注意する。

3 連立不等式の解き方

- ① 連立不等式 $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$ の解は、 $A > 0$ の解と $B > 0$ の解の共通範囲である。
- ② 不等式 $A < B < C$ は、 $A < B$ と $B < C$ が同時に成り立つことを意味する。



6 絶対値を含む方程式・不等式

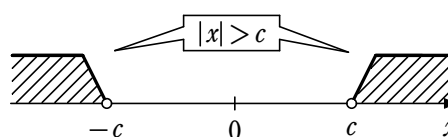
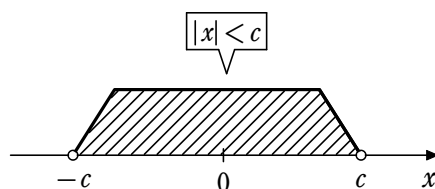
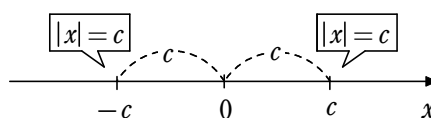
1 絶対値を含む方程式・不等式

$c > 0$ のとき

$$\text{方程式 } |x| = c \text{ の解は } x = \pm c$$

$$\text{不等式 } |x| < c \text{ の解は } -c < x < c$$

$$\text{不等式 } |x| > c \text{ の解は } x < -c, \quad c < x$$



第2講 例題

1 ★☆☆

次の不等式を解け。

(1) $4x+5>3x-2$

(2) $9-x\leq 2x-3$

(3) $\frac{4-x}{2}>7+2x$

2 ★★☆☆

a を定数とする。次の方程式，不等式を解け。

(1) $ax-6=2x-3a$

(2) $ax-6>2x-3a$

3 ★☆☆

次の値を求めよ。

(1) $|-6|$

(2) $|2.7|$

(3) $\left|-\frac{2}{5}\right|$

(4) $|-2|-|-6|$

(5) $|\pi-4|$

(6) $|\sqrt{3}-2|$

4 ★★☆☆

次の方程式を解け。

(1) $|x-3|=1$

(2) $|x+5|=4$

(3) $|3x+1|=5$

5 ★★☆☆

次の不等式を解け。

(1) $|x-3|<2$

(2) $|x+2|\geq 4$

(3) $|2x+7|\leq 2$

6 ★☆☆

次の式の絶対値記号をはずせ。

(1) $|x+1|$

(2) $|2x-4|$

(3) $|x-2|+|x+4|$

7 ★★☆☆

次の方程式を解け。

(1) $|x-3|=2x$

(2) $|x|+2|x-1|=x+3$

8 ★★★★★

次の不等式を解け。

(1) $|x-4|<3x$

(2) $|x-1|+2|x-3|\leq 11$

第2講 例題演習

1

次の1次不等式を解け。

$$(1) \quad 5x + 16 \leq 9x - 4 \qquad (2) \quad 3(x - 1) \geq 2(5x + 4) \qquad (3) \quad \frac{5x + 1}{4} - \frac{2 - 3x}{3} < \frac{1}{6}x + 1$$

2

次の方程式，不等式を解け。ただし， a は定数とする。

$$(1) \quad ax = 2(x + a) \qquad (2) \quad ax \leq 3 \qquad (3) \quad ax + 1 > x + a^2$$

3

次の値を求めよ。ただし， π は円周率である。

$$(1) \quad \left| \frac{1}{3} \right| \qquad (2) \quad |-5 + 2| \qquad (3) \quad |2| - |-7|$$
$$(4) \quad \left| -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right| \qquad (5) \quad |2 - \sqrt{2}| \qquad (6) \quad |\pi - 3| + |\pi - 4|$$

4

次の方程式を解け。

$$(1) \quad |x - 1| = 2 \qquad (2) \quad |3x + 1| = 4 \qquad (3) \quad |3 - 5x| = 2$$

5

次の不等式を解け。

$$(1) \quad |x - 2| < 4 \qquad (2) \quad |3 - x| \geq 2 \qquad (3) \quad |3x + 4| > 5$$

6

次の式の絶対値記号をはずせ。

$$(1) \quad |4 - x| \qquad (2) \quad |3x + 2| \qquad (3) \quad |x - 2| + |x + 4|$$

7

次の方程式を解け。

$$(1) \quad |x + 1| = 3x \qquad (2) \quad |x - 3| = -2x \qquad (3) \quad |2x| + |x - 2| = 6$$

8

次の不等式を解け。

$$(1) \quad 3|x + 1| < x + 5 \qquad (2) \quad |x - 5| \leq \frac{2}{3}|x| + 1$$

第2講 レベルA

1

a は定数とする。次の方程式，不等式を解け。

(1) $a^2x + 1 = ax + a$

(2) $ax > x + a^2 + a - 2$

2

次の不等式，連立不等式を解け。

(1) $\frac{2}{3}(x+1) - \frac{5}{6} \geq x - \frac{3}{2}$

(2)
$$\begin{cases} -x + 5 \geq 2x - 4 \\ 3(2x - 1) + 1 > 4x + 3 \end{cases}$$

(3) $|x - 5| < 7$

(4) $|3x + 2| > 5$

3 [愛知工業大]

次の方程式を解け。

(1) $2|x+1| - |x-3| = 2x$

(2) $||x-1| - 2| - 3 = 0$

第2講 レベルB

1

a, b は定数とする。不等式 $ax > 3x - b$ を解け。

2 [金沢工業大]

k を実数の定数とする。2つの不等式

$$\begin{cases} |x-1| < 6 \\ |x-k| < 2 \end{cases}$$

をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。

3

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x-3| + |2x-3| = 9$

(2) $||x-2|-4| = 3x$

(3) $|2x-3| \leq |3x+2|$

(4) $2|x+2| + |x-4| < 15$

第3講 実数・集合

第2節 実数

4 実数

1 実数の分類

実数 $\begin{cases} \text{有理数} & \text{分数の形に表される数 (整数, 有限小数, 循環小数)} \\ \text{無理数} & \text{分数で表すことのできない数 (循環しない無限小数)} \end{cases}$

2 数直線と絶対値

数直線上で、実数 a に対応する点と原点との距離を a の **絶対値** といい、記号 $|a|$ で表す。

$$a \geq 0 \text{ のとき } |a| = a, \quad a < 0 \text{ のとき } |a| = -a$$

5 根号を含む式の計算

1 平方根の性質

実数 a について $\sqrt{a^2} = |a|$

$$a > 0, b > 0, k > 0 \text{ のとき } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

2 分母の有理化 a, b は正の数で, $a \neq b$ とする。

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

発展 2重根号

1 2重根号

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b > 0 \text{ のとき } \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

第3講 実数・集合

集合 研究 3つの集合の共通部分と和集合

1 集合

集合の表し方 ① $\{ \}$ の中に要素を書き並べて表す。 $A = \{1, 2, 4, 8\}$

② 要素が満たすべき条件を書いて表す。 $A = \{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の正の約数}\}$

$x \in A$ (x は A に属する) x が集合 A の要素である

$x \notin A$ x が集合 A の要素でない

$A \subset B$ (A は B の部分集合) 集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある

$A = B$ (A と B は等しい) 集合 A と B の要素がすべて一致している

$\emptyset$ (空集合) 要素が1つもない集合

2 共通部分と和集合

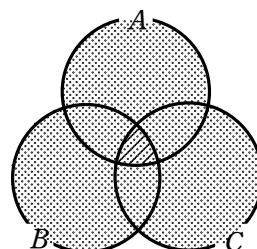
1 $A \cap B$ (A と B の共通部分) 集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合

$A \cup B$ (A と B の和集合) 集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合

2 3つの集合の共通部分と和集合

$A \cap B \cap C$ (共通部分) 集合 A, B, C のすべてに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$ (和集合) 集合 A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合



$A \cap B \cap C$

$A \cup B \cup C$

3 補集合

$\overline{A}$ (補集合) 全体集合 U の部分集合 A に対して U の要素で A には属さない要素全体の集合

ド・モルガンの法則 1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

第3講 例題

1 ★☆☆

(1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$ を計算せよ。

(2) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

2 ★☆☆

$x = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$, $y = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2y + xy^2$ (4) $x^2 + y^2$ (5) $x^3 + y^3$

3 ★★☆☆

2重根号をはずして, 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$ (2) $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

4 ★☆☆

次の集合を, 要素を書き並べて表せ。

(1) 6以下の自然数全体の集合 (2) 3桁の5の倍数全体の集合
(3) $\{x \mid -4 < x < 3, x \text{ は整数}\}$ (4) $\{3n - 1 \mid n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$

5 ★☆☆

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を全体集合とする。 U の部分集合

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ について, 次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$ (2) $\overline{B}$ (3) $\overline{A \cap B}$
(4) $\overline{A \cup B}$ (5) $A \cup \overline{B}$ (6) $\overline{A} \cap B$

6 ★★☆☆

全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ の部分集合 A, B について

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 8\}, A \cap B = \{3\}, \overline{A} \cap B = \{4, 7, 10\}$$

がわかっている。このとき, $A, B, A \cap \overline{B}$ を求めよ。

第3講 例題演習

1

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

(2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

2

$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x+y, xy$

(2) x^2+y^2

(3) $x^4y^3+x^3y^4$

(4) x^3+y^3

3

2重根号をはずして、次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{5-\sqrt{24}}$

(3) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

4

次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(1) 15以下の正の奇数全体の集合

(2) 36の正の約数全体の集合

(3) $\{x \mid -3 < x < 4, x \text{ は整数}\}$

(4) $\{3n-2 \mid 1 \leq n \leq 5, n \text{ は整数}\}$

5

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$

(2) $\overline{B}$

(3) $\overline{A \cap B}$

(4) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(5) $\overline{A} \cup B$

(6) $A \cap \overline{B}$

6

全体集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ の部分集合 A, B について、 $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $\overline{A} \cap B = \{7\}$ であるとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overline{A} \cap \overline{B}$ を求めよ。

(2) $A \cap \overline{B}$ を求めよ。

第3講 レベルA

1

$x = \sqrt{2} - 1$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x + \frac{1}{x}$ (2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (3) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ (4) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

2 [東京海洋大]

次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

(1) $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$
(3) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ (4) $\sqrt{9 + 4\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$

3

次の各場合について、 $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ を x の整式で表せ。

(1) $x \geq 2$ (2) $x < 2$

4

全体集合を $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ 、その部分集合 A, B, C をそれぞれ $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C = \{c, d, e, f\}$ とする。このとき、次の集合をそれぞれ求めよ。

(1) $A \cup B, \overline{A \cup C}, \overline{A \cap B}$
(2) $A \cup B \cup C, (A \cup C) \cap B, \overline{(A \cap B) \cup C}$

5

$U = \{x \mid 0 < x < 10, x \text{ は整数}\}$ を全体集合とする。

(1) $P = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$ の補集合 $\overline{P}$ を求めよ。
(2) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\overline{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$ のとき、 $A \cup B$, A , B を求めよ。

6

実数 a に対して、2つの集合を

$$A = \{a - 1, 4, a^2 - 5a + 6\}, B = \{1, a^2 - 4, a^2 - 7a + 12, 4\}$$

とする。 $A \cap B = \{0, 4\}$ であるとき、 a の値を求めよ。

7

実数全体を全体集合とし、 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid |x| < 4\}$,
 $C = \{x \mid k-7 \leq x < k+3\}$ (k は定数) とする。

(1) 次の集合を求めよ。

(ア) $\overline{B}$

(イ) $A \cup \overline{B}$

(ウ) $A \cap \overline{B}$

(2) $A \subset C$ となる k の値の範囲を求めよ。

第3講 レベルB

1 [福島大]

$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ のとき, $\frac{x^{10} - 1}{x^5}$ の値を計算せよ。

2

$x = \sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$, $y = \sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\sqrt{\frac{x}{y}}$

(2) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

3

$\sqrt{x^2 - 10x + 25} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ を x の整式で表せ。

4 [防衛医科大学校]

集合 $X = \{1, 2, 3\}$ とするとき, X の部分集合 A, B が, 以下の2つの条件 (i), (ii) を満たしているとする。このような A, B の組はいくつあるか。

(i) $B \subset A$

(ii) 集合 B の要素の個数が, B の要素にもなっている。

5 [東京国際大]

集合 U を1から9までの自然数の集合とする。 U の部分集合 A, B, C について以下が成立している。

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}, A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\},$$

$$B \cup C = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}, A \cap B = \{4, 9\}, A \cap C = \{7\}, B \cap C = \{1\}, A \cap B \cap C = \emptyset$$

(1) 集合 $\overline{B} \cap \overline{C}$ を求めよ。

(2) 集合 $A \cap (\overline{B \cup C})$, A を求めよ。

第4講 命題

10 命題と条件 11 命題とその逆・対偶・裏

1 命題と条件

命題 正しい(真)か正しくない(偽)かが定まる文や式を **命題** という。

条件 文字(x など)を含んだ文や式を(x に関する) **条件** という。

条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の **全体集合** という。

2 命題 $p \implies q$

1 命題 $p \implies q$ は、「 p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。
 p を **仮定**, q を **結論** という。

2 条件 p を満たすものの全体の集合を P , 条件 q を満たすものの全体の集合を Q とするとき、「命題 $p \implies q$ が真である」と「 $P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

反例 偽である命題 $p \implies q$ において、 p を満たすが q を満たさないものを **反例** という。命題が偽であることを示すには、反例を1つだけあげればよい。

3 必要条件と十分条件

2つの条件 p, q について、命題 $p \implies q$ が真であるとき、
 q は p であるための **必要条件** である、
 p は q であるための **十分条件** である という。

同値 2つの条件 p, q について、 $p \iff q$ ($p \implies q$ かつ $q \implies p$)が成り立つとき、
 p と q は **同値** であるという。このとき、 q は p であるための
(p は q であるための) **必要十分条件** であるという。

4 否定

否定 条件 p に対して、「 p でない」という条件を p の **否定** といい、 $\bar{p}$ で表す。

「かつ」の否定, 「または」の否定 条件 p, q に対して、次が成り立つ。

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

5 命題の逆・対偶・裏

命題 $p \implies q$ に対して

$q \implies p$ を $p \implies q$ の **逆**

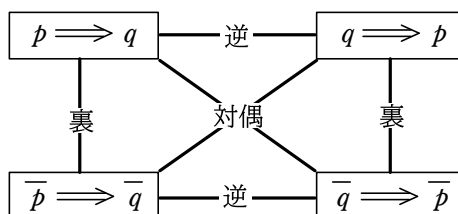
$\bar{q} \implies \bar{p}$ を $p \implies q$ の **対偶**

$\bar{p} \implies \bar{q}$ を $p \implies q$ の **裏**

という。

1 もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

2 命題 $p \implies q$ とその対偶 $\bar{q} \implies \bar{p}$ の真偽は一致する。



12 命題と証明

1 対偶を利用する証明

命題 $p \implies q$ を証明するのに、その対偶 $\bar{q} \implies \bar{p}$ を証明してもよい。

2 背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことで、もとの命題が真であると結論する。

第4講 例題

1 ★☆☆

次の命題の真偽を調べよ。ただし、 m, n は自然数、 x, y は実数とする。

- (1) n が 8 の倍数ならば、 n は 4 の倍数である。
- (2) $m+n$ が偶数ならば、 m, n はともに偶数である。
- (3) xy が有理数ならば、 x, y はともに有理数である。
- (4) x, y がともに有理数ならば、 xy は有理数である。

2 ★☆☆

x, y は実数、 m は整数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) $x \neq 1$ かつ $y = 4$
- (2) $x \leq 3$ または $y > 7$
- (3) $-1 \leq x < 2$
- (4) m は偶数または 3 の倍数である。
- (5) x, y はともに無理数である。

3 ★★☆☆

a, b, c, x は実数とする。次の の中は、「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」のうち、それぞれどれが適するか。

- (1) $x=2$ は $x^2+x-6=0$ であるための 。
- (2) $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ は、 $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ であるための 。
- (3) $a=b$ は $a+c=b+c$ であるための 。
- (4) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための 。

4 ★☆☆

x, y は実数とする。次の命題の逆、対偶、裏を述べよ。また、逆、対偶の真偽を調べよ。

$$x+y=3 \implies x=1 \text{ かつ } y=2$$

5 ★★☆☆

n は自然数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。

- (1) n^2+1 が奇数ならば、 n は偶数である。
- (2) 整数 n の平方が 3 の倍数ならば、 n は 3 の倍数である。

第4講 例題

6★★☆

$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，次の数が無理数であることを証明せよ。

(1) $1 + \sqrt{6}$

(2) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

第4講 例題演習

1

次の命題の真偽を調べよ。ただし、 x, y は実数、 m, n は自然数とする。

- (1) $|x|=|y|$ ならば $x=y$ である
- (2) $x=2$ ならば $x^2-5x+6=0$ である
- (3) m, n がともに素数 ならば $m+n$ は偶数 である
- (4) n が3の倍数 ならば n は9の倍数 である

2

x, y は実数、 m, n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) $x < -1$ かつ $y > 0$
- (2) n は偶数 または 3 の倍数
- (3) $3 \leq x < 7$
- (4) $y \leq -1$ または $y = 2$
- (5) m, n はともに5の倍数
- (6) m, n の少なくとも一方は偶数

3

x, y, z は実数とする。次の 内に、必要、十分、必要十分のうち最も適するものを入れよ。また、いずれでもないものには×印をつけよ。

- (1) $x=5$ かつ $y=7$ は、 $x+y=12$ であるための 条件
- (2) $x=2$ は $x^2-4=0$ であるための 条件
- (3) $x(x-2)=0$ は $x(x+3)=0$ であるための 条件
- (4) $x>0$ は $x>1$ であるための 条件
- (5) $x=y$ は $x+z=y+z$ であるための 条件

4

x, y は実数とする。次の命題の逆・対偶・裏を述べ、その真偽をいえ。

- (1) $x+y=5 \implies x=2$ かつ $y=3$
- (2) xy が無理数ならば、 x, y の少なくとも一方は無理数である。

5

m, n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。

- (1) n^2 が5の倍数ならば、 n は5の倍数である。
- (2) mn が3の倍数ならば、 m, n の少なくとも一方は3の倍数である。

6

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，次の数が無理数であることを証明せよ。

(1) $4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(3) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

第4講 レベルA

1

a, b, c は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

- (1) $a=3 \implies a^2+4a-21=0$ (2) $ac=bc \implies a=b$
(3) $a+b, ab$ がともに整数ならば, a, b はともに整数である。

2

x, y, z は実数とする。次の の中には, 「必要条件であるが十分条件ではない」, 「十分条件であるが必要条件ではない」, 「必要十分条件である」, 「必要条件でも十分条件でもない」のうち, それぞれどれが適するか。

- (1) $(x-y)(y-z)=0$ は $x=y=z$ であるための 。
(2) $xy=0$ かつ $x \neq 0$ は, $y=0$ であるための 。
(3) $x=y=0$ は, $xy=0$ かつ $x+y=0$ であるための 。
(4) $\angle A < 90^\circ$ は $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 。
(5) $\triangle ABC$ の3辺 BC, CA, AB の長さを, それぞれ a, b, c とする。
 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$ は $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であるための 。

3

対偶を考えることにより, 次の命題を証明せよ。

- (1) 整数 a, b について, 積 ab が3の倍数ならば, a または b は3の倍数である。
(2) 整数 m, n について, m^2+n^2 が奇数ならば積 mn は偶数である。

4

- (1) a, b が有理数, u が無理数で, $a+bu=0$ であるならば, $a=0$ かつ $b=0$ であることを証明せよ。
(2) 次の等式を満たす有理数 p, q の値を求めよ。

[1] $(p-3)+(q+2)\sqrt{5}=0$

[2] $(1+\sqrt{5})p+(3-2\sqrt{5})q=0$

第4講 レベルB

1 [センター本試]

三角形に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p : 3つの内角がすべて異なる

q : 直角三角形でない

r : 45° の内角は1つもない

条件 p の否定を $\bar{p}$ で表し、同様に $\bar{q}, \bar{r}$ はそれぞれ条件 q, r の否定を表すものとする。

(1) 命題「 $r \Rightarrow (p \text{ または } q)$ 」の対偶は「 $\boxed{\text{ア}} \Rightarrow \bar{r}$ 」である。

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから1つ選べ。

① (p かつ q)

① ($\bar{p}$ かつ $\bar{q}$)

② ($\bar{p}$ または q)

③ ($\bar{p}$ または $\bar{q}$)

(2) 次の ① ~ ④ のうち、命題「(p または q) $\Rightarrow r$ 」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ である。 $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを、① ~ ④ のうちから1つずつ選べ。ただし、 $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ の解答の順序は問わない。

① 直角二等辺三角形

① 内角が $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ の三角形

② 正三角形

③ 3辺の長さが3, 4, 5の三角形

④ 頂角が 45° の二等辺三角形

(3) r は (p または q) であるための $\boxed{\text{エ}}$ 。

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを、次の ① ~ ③ のうちから1つ選べ。

① 必要十分条件である

① 必要条件であるが、十分条件ではない

② 十分条件であるが、必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

2 [立教大]

次の命題の真偽をいえ。真のときにはその証明を、偽のときには反例をあげよ。ただし、

(2), (3) については、 $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1) $x^3 + y^3 + z^3 = 0, x + y + z = 0$ のとき、 x, y, z のうち少なくとも1つは0である。

(2) x が実数であるとき、 $x^2 + x$ が有理数ならば、 x は有理数である。

(3) x, y がともに無理数ならば、 $x + y, x^2 + y^2$ のうち少なくとも一方は無理数である。

3

(1) n を整数とするとき、 n^2 が5の倍数ならば、 n は5の倍数であることを証明せよ。

(2) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。