第６章

～　微分法　～

第１講　導関数

１　微分係数

$\boxed{1}$ 極限値

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の **極限値** という。このことを，次のように書く。

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

$\boxed{2}$ 平均変化率と微分係数

関数 $y=f(x)$ において

$x=a$ から $x=b$ までの**平均変化率**　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$x=a$ における**微分係数**（変化率）　$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\boxed{3}$ 接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

２　導関数とその計算

$\boxed{1}$ 導関数

１　関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

２　関数 x^n の導関数　$(x^n)'=nx^{n-1}$　（n は正の整数）

定数関数 c の導関数　$(c)'=0$

$\boxed{2}$ k は定数とする。

$y=kf(x)$ を微分すると　$y'=kf'(x)$

$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)+g'(x)$

$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)-g'(x)$

$y=f(x)g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$y=f(g(x))$ を微分すると　$y'=f'(g(x))g'(x)$

例えば，$y=(ax+b)^n$ を微分すると　$y'=a(ax+b)^{n-1}$

第１講　例題

1 ★☆☆

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-3x+4)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{1}{x-5}\left(2-\frac{10}{x}\right)$

2 ★★☆

関数 $f(x)=3x^2-5$ について

(1) x が -1 から 5 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2) $x=2$ における微分係数を，定義に従って求めよ。

3 ★★☆

導関数の定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=-3x+4$　(2) $y=x^2-3x+5$　(3) $y=x^3-3x$

4 ★☆☆

次の関数を微分せよ。

(1) $f(x)=3x^2-5x+6$　(2) $f(x)=x^3-4x^2-1$　(3) $f(x)=x^4-2x^2+7x-3$

(4) $f(x)=(x+1)(3x^2-2)$　(5) $f(x)=3(2x+1)^3$

5 ★★☆

次の条件をすべて満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f'(1)=-4,\quad f'(-1)=8,\quad f(3)=-6$$

6 ★★☆

等式 $2f(x)+xf'(x)=-8x^2+6x-10$ を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+2x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-3x}{x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3}\left(\frac{12}{x-3}+2\right)$

$\boxed{2}$

(1) 関数 $f(x)=4x-1$ の，$x=1$ から $x=1+h$ までの平均変化率を求めよ。

(2) 定義に従って，次の関数の与えられた値における微分係数を求めよ。

①　$f(x)=2x+3$　$(x=1)$　②　$f(x)=x^3-2x$ $(x=2)$

$\boxed{3}$

導関数の定義に従って，次の関数を微分せよ。

(1) $y=5$　(2) $y=x^3+2x$　(3) $y=\dfrac{1}{x}$　(4) $y=\sqrt{x}$

$\boxed{4}$

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{5}$　(2) $y=-x^5+x^3$　(3) $y=2(x+5)(x-1)$

(4) $y=(x+1)(2x^2-x+1)$　(5) $y=(x+2)^3$

$\boxed{5}$

次の条件をすべて満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f'(0)=2$，$f'(1)=4$，$f(2)=6$　(2) $f'(2)=-5$，$f'(-1)=7$，$f(1)=3$

$\boxed{6}$

等式 $xf'(x)+x^2+2x=3f(x)$ を満たす２次関数 $f(x)$ を求めよ。

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$ ［千葉工業大］

関数 $f(x)=x^3+5x^2+6x+7$ の $x=-1$ から $x=2$ までの平均変化率は $^{ア}\boxed{}$ であり，

$x=$ $^{イ}\boxed{}$ (ただし，$-1<$ $^{イ}\boxed{}$ <2) における微分係数に等しい。

$\boxed{2}$

次の関数を，(　) 内の変数で微分せよ。ただし，右辺では，変数以外の文字は定数とする。

(1)　$y=2t^2$　(t)

(2)　$S=\pi r^2$　(r)

(3)　$V=V_0(1+0.02t)$　(t)

(4)　$t=k(1+2x)(2-3x)$　(x)

$\boxed{3}$

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^2(3x-1)$

(2)　$y=(x-1)(x^2+x-4)$

(3)　$y=(x+2)^3$

(4)　$y=(x^2-x+1)^2$

(5)　$y=(x^3-2x)^2$

(6)　$y=(3x+2)^2(x+1)$

$\boxed{4}$ ［大阪電気通信大］

x の整式 $f(x)$ が常に $f(x)+x^2f'(x)=kx^3+k^2x+1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，k は 0 でない定数である。

(1)　整式 $f(x)$ を x の n 次式とするとき，n の値を求めよ。

(2)　整式 $f(x)$ を求めよ。

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$

等式 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}$ を満たす定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{2}$

微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，次の極限値を $f'(a)$ を用いて表せ。

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$

$\boxed{3}$

n は２以上の自然数とする。x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

３　接線の方程式

1　接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

４　関数の増減と極大・極小

1　関数の増減と導関数の符号

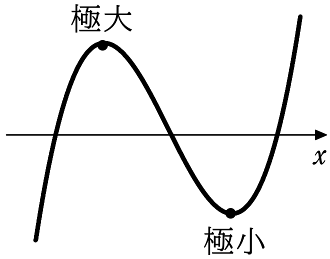
関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる。

１　$f'(x)>0$ となる x の値の範囲では増加する。

２　$f'(x)<0$ となる x の値の範囲では減少する。

注　常に $f'(x)=0$ となる x の値の範囲では，$f(x)$ は一定の値をとる。

2　関数の極大・極小



１　$f'(x)$ の符号が

正から負 $\Longrightarrow$ 極大

負から正 $\Longrightarrow$ 極小

２　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

注　$f'(a)=0$ であっても $f(a)$ が極値とは限らない。

3　3 次関数の極値

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\fallingdotseq 0)$ とする。

１　$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ すなわち $3ax^2+2bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつこと。すなわち，判別式 D について $\dfrac{D}{4}=b^2-3ac>0$

２　極値をもつときは極大値，極小値を 1 つずつもち

(極大値)＞(極小値)

3 次の項の係数 a について，

$a>0$ ならば　(極大値をとる x の値)＜(極小値をとる x の値)

$a<0$ ならば　(極大値をとる x の値)＞(極小値をとる x の値)

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

曲線 $y=-x^3+5x$ について，次の接線の方程式を求めよ。

(1)　曲線上の点 $(1,\ 4)$ における接線　　　(2)　傾き -4 の接線

$\boxed{2}$ ★★☆

(1)　点 $(3,\ 4)$ から，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　点 $(2,\ 4)$ を通り，曲線 $y=x^3-3x+2$ に接する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★★

2 つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

次の関数に極値があればそれを求めよ。また，グラフをかけ。

(1)　$y=2x^3-3x^2+1$　　　(2)　$y=-x^3+6x^2-12x+7$

$\boxed{5}$ ★★☆

(1)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=2x^3+kx^2+kx+1$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

(1)　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^3+3x^2$ に接し，傾きが 9 である直線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$

次の曲線の与えられた点を通る接線の方程式とその接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x+4$　$(0,\ 0)$

(2)　$y=x^2-x+3$　$(1,\ -1)$

(3)　$y=x^3+1$　$(1,\ 2)$

(4)　$y=\dfrac{1}{8}(x+1)^3$　$\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$

$\boxed{3}$

2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-x^2+6x-5$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$

次の関数に極値があればそれを求めよ。また，グラフをかけ。

(1)　$y=-x^3+3x$

(2)　$y=x^3-3x^2+3x$

$\boxed{5}$

次の条件を満たすような，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+1$ が極値をもつ。

(2)　関数 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$ が単調に増加する。

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

曲線 $y=x^3-3x^2+2x+1$ について，次のものを求めよ。ただし，点Aにおける法線とは，その点を通り，その点における接線に垂直な直線のことである。

(1)　曲線上の点 $(1,\ 1)$ における法線の方程式

(2)　(1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $(1,\ 1)$ 以外の点の座標

$\boxed{2}$

2 つの曲線 $y=x^2+2$，$y=x^2+ax+3$ の交点を P とする。P におけるそれぞれの曲線の接線が垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{3}$

放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(1,\ -3)$ を通り，点 $(2,\ 6)$ で曲線 $y=x^3+dx$ と共通の接線をもつとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$\boxed{4}$

$y=|x+2|(x-1)^2$ のグラフをかけ。

第２講　レベルＢ

1 [関西大]

座標平面上において，点 $(-2,\ -2)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた２本の接線のそれぞれの接点を結ぶ直線の方程式を求めよ。

2

曲線 C：$y=x^4-2x^3-3x^2$ と異なる２点で接する直線の方程式を求めよ。

3 [上智大]

関数 $y=x^3-3x^2+3ax$ は極値をもつとする。

(1)　極小値を与える x の値は，どの範囲にあるか。

(2)　極大値，極小値を与える x の値がともに $x>0$ の範囲にあるのは，a がどのような範囲の値のときか。

4 [名城大]

３次関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-(a+1)x^2+a(a+1)x$ (a は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をもち，極大値と極小値の差が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，a の値を求めよ。

第３講　微分の応用，最大・最小

５　関数の増減・グラフの応用

$\boxed{1}$　**関数の最大・最小**

$a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最大・最小は，$f(x)$ の極値と定義域の端における関数の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を調べて決定する。その際，増減表を利用する。

注　１　極大値，極小値は必ずしも最大値，最小値ではない。

　　２　定義域が $a<x<b$ や $x \geqq a$ などの場合には，最大値，最小値がないこともある。

$\boxed{2}$　**文章題（最大・最小）の解法の手順**

[1]　変数を適当に選び，求める量の関数を作る。

[2]　定義域に注意して，その関数の最大値・最小値を調べる。

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★★☆

関数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ が $x=1$ で極値 0 をとるように，定数 b，c の値を定めよ。

$\boxed{2}$ ★★★

次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

(1)　$y=3x^4-16x^3+18x^2+5$　　(2)　$y=x^4-8x^3+18x^2-11$

$\boxed{3}$ ★★☆

関数 $y=x^3-x^2$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

$0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=2\sin x\sin 2x-\cos x+2$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★★

$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3a^2x$　$(0\leqq x\leqq 1)$ について

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値 -5 をとるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

$\boxed{2}$

次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^4-2x^3-2x^2$

(2)　$y=x^4-4x+3$

(3)　$y=-x^4+6x^2-8x-7$

$\boxed{3}$

次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=-x^3-3x^2+5\quad(-4\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=x^3-3x^2+4\quad(-2\leqq x\leqq 2)$

$\boxed{4}$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ で定義された関数 $f(\theta)=8\sin^3\theta-3\cos 2\theta-12\sin\theta+7$ の最大値，最小値と，そのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5}$

a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

a を実数とする。3 次関数 $f(x)=-x^3+ax^2+a(a+4)x+3$ は $x=-1$ で極小値をとる。定数 a の値と $f(x)$ の極小値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$

$f(x)=ax^2(x-3)+b\ (a \neq 0)$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 5，最小値が -7 であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{3}$

底面の半径 6，高さ 18 の直円すいに直円柱を内接させる。この直円柱の体積 V が最大になるときの直円柱の底面の半径と高さを求めよ。

$\boxed{4}$

$a>1$ とする。$1 \leqq x \leqq a$ における関数 $y=2x^3-9x^2+12x$ について

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{5}$ [早稲田大]

関数 $f(x)=2^x+2^{-x}$ は $x=$ ア $\boxed{}$ のとき，最小値 イ $\boxed{}$ をとる。また，関数 $g(x)=8^x+8^{-x}-4(4^x+4^{-x})$ は $x=$ ウ $\boxed{}$ のとき，最小値 エ $\boxed{}$ をとる。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$

関数 $f(x)=3x^4+4(3-a)x^3+12(1-a)x^2$ $(a \geqq 0)$ について，$f(x)$ が極小となる x の値とそのときの極小値を求めよ。

$\boxed{2}$［上智大］

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,\ 1)$ に関して対称であり，この関数は $x=1$ のとき極大値をとる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{3}$［武庫川女子大］

3 つの実数 x，y，z は $4x+y+z=0$，$6x^2-yz-18=0$ を同時に満たす。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$-2x^3+y^2+z^2$ の最小値とそのときの，x，y，z の値を求めよ。

$\boxed{4}$

$f(x)=x^3-10x^2+17x+44$ とする。区間 $a \leqq x \leqq a+3$ における $f(x)$ の最大値を表す関数 $g(a)$ を，a の値の範囲によって求めよ。

第４講　方程式・不等式への応用

５　関数の増減・グラフの応用

$\boxed{3}$　方程式への応用

１　$f(x)=0$ の実数解　　　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標

２　$f(x)=g(x)$ の実数解　２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標

$\boxed{4}$　不等式への応用

不等式 $f(x)>g(x)$ を証明するには，関数 $F(x)=f(x)-g(x)$ の値の変化を調べる。

１　$F(x)$ の最小値 >0 を示す。

２　$x>a$ で $F'(x)>0$ かつ $F(a)>0$ ならば，$x>a$ で $F(x)>0$

第４講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3+6x^2-6=0$　　　(2)　$2x^3+6x+1=0$

$\boxed{2}$★★☆

a は定数とする。$2x^3+9x^2-3-a=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

$\boxed{3}$★★☆

$x \geqq 0$ のとき不等式 $x^3+12>9x$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{4}$★★★

曲線 C：$y=x^3+3x^2+x$ と点 A $(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$★★★

3 次方程式 $2x^3-3(a+1)x^2+6ax-2a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

第４講　例題演習

1

次の３次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$-x^3-3x^2+4=0$　　(2)　$2x^3+3x^2+1=0$

2

方程式 $x^3-3x+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

3

次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+\frac{1}{27} \geqq x^2$　　(2)　$x>2$ のとき　$x^3+16>12x$

4

k は定数とする。点 $(0,\ k)$ から曲線 C：$y=-x^3+3x^2$ に引いた接線の本数を求めよ。

5

$x^3-3px+p=0$ が異なる３つの実数解をもつための p の範囲を求めよ。

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

方程式 $3x^4-4x^3+1=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$\boxed{2}$

方程式 $2x^3+x^2-5x+1=0$ は区間 $0<x<1$ に実数解をもつことを示せ。

$\boxed{3}$［京都産業大］

(1)　曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 3 点を共有するような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　方程式 $x^3-6x+c=0$ が 2 つの異なる正の解と 1 つの負の解をもつような c の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$

次の 3 次不等式を解け。

(1)　$x^3-4x>0$　　　(2)　$x^3-3x-2\geqq 0$

$\boxed{5}$［関西学院大］

k を正の定数とする。方程式 $(\log_2 x)^3-3\log_2 x=k$ がちょうど 2 つの異なる解をもつとき，$k=$ ${}^{ア}\boxed{}$ で，そのときの解は $x=$ ${}^{イ}\boxed{}$，${}^{ウ}\boxed{}$ である。ただし，${}^{イ}\boxed{}<{}^{ウ}\boxed{}$ とする。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [慶応義塾大]

$x \geqq 0$ のとき，$x^3+32 \geqq px^2$ が成り立つような定数 p の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ [関西大]

xy 平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-x$ に 3 本の相異なる接線が引けるための条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のある範囲を図示せよ。

$\boxed{3}$ [兵庫医科大]

c を定数とし，3 次方程式 $2x^3+7x^2+4x+c=0$ は，相異なる 3 個の実数解をもつとする。

(1)　定数 c の値の範囲を求めよ。

(2)　異なる 3 つの解を α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ として，β が $\beta<-1$ を満たすとき，c の値の範囲と解 α，γ の値の範囲をそれぞれ求めよ。