第７章

～　積分法　～

第１講　不定積分と定積分

１　不定積分

$\boxed{1}$　導関数と不定積分

１　$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき　$\displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$　（C は積分定数）

２　x^n の不定積分　n は０以上の整数とする。

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad （C は積分定数）$$

参考　$\displaystyle\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

$\boxed{2}$　関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき，C を積分定数とすると

定数倍　$\displaystyle\int kf(x)dx=kF(x)+C$　k は定数

和　$\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$

差　$\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)+C$

２　定積分

$\boxed{1}$　定積分とその計算　$F'(x)=f(x)$ のとき　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

定数倍　$\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　k は定数

和　$\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

差　$\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

定積分の性質

１　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

２　$\displaystyle\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

３　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$\boxed{2}$　偶関数・奇関数の定積分　n は０以上の整数とする。

１　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$

２　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n-1}dx=0$

第１講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(x^3-3x^2+x-4)dx$　　(2) $\displaystyle\int(3y+2)^2dy$　　(3) $\displaystyle\int(t-x)(2t+x)dt$

$\boxed{2}$★★☆

(1)　次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=4x^2-x+1,\quad F(0)=3$$

(2)　２次関数 $f(x)$ の１つの不定積分 $F(x)$ が $xf(x)-x^3+2x^2$ に等しく，$f(-1)=0$ である。このとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$★☆☆

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2(x^2-x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3(x-2)^2dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-2}^1(x+2)^2(x-1)dx$

$\boxed{4}$★★☆

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^2(x+1)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^0(3x^3+x^2)dx-\int_2^0(3x^3+x^2)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}(2x^2+3)dx+\int_{-1}^1(2x^2+3)dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^3(9x^2-2x^3)dx-\int_2^3(9x^2-2x^3)dx$

$\boxed{5}$★☆☆

定積分 $\displaystyle\int_{-3}^3(4x^3+6x^2-9x-10)dx$　を求めよ。

$\boxed{6}$★★☆

関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の３つの条件を満たすように定数 a，b，c の値を定めよ。

$$f(1)=8,\ \int_{-1}^1 f(x)\,dx=4,\ \int_{-1}^1 xf'(x)\,dx=4$$

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(4x+7)dx$　(2) $\displaystyle\int(12x^3-9x^2+11x-10)dx$　(3) $\displaystyle\int(4t-3)(3t+2)dt$

(4) $\displaystyle\int(x+3)^3dx$　(5) $\displaystyle\int(tx+1)(x+2t)dt$

$\boxed{2}$

(1)　次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

①　$F'(x)=4x+2$，$F(0)=1$　②　$F'(x)=3(x-1)(x-2)$，$F(1)=-1$

(2)　2 次関数 $f(x)$ の 1 つの不定積分 $F(x)$ が $xf(x)-2x^3+3x^2$ に等しく，$f(1)=0$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2(6x^2-1)dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2(-3)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1(3x^2+2x-1)dx$

(4) $\displaystyle\int_2^4(x-1)(x-2)dx$　(5) $\displaystyle\int_{-2}^3(x-2)^2dx$　(6) $\displaystyle\int_{-1}^3(x+1)^2(x-1)dx$

$\boxed{4}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{-3}(2x^2+9x-7)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^4(2x+1)dx+\int_{-2}^4(3x^2-x)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^4(x+1)^2dx-\int_1^4(x-1)^2dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1x(x+1)(x-1)dx+\int_1^4x(x+1)(x-1)dx$

(5) $\displaystyle\int_1^3(1+2x)(1-3x)dx-\int_2^3(1+2x)(1-3x)dx$

$\boxed{5}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1(4x^3+3x^2+3x+1)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^2(x-1)(2x^2-3x+1)dx$

$\boxed{6}$

次の等式を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0,\ \int_0^2 f(x)\,dx=10,\ \int_{-1}^1 xf(x)\,dx=\frac{4}{3}$$

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$［小樽商科大］

(曲線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ 0)$ を通り，更に点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きが x^2-1 であるとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$［成蹊大］

p，q を定数とする。定積分 $\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx$ は，$p=$ ア$\boxed{}$，$q=$ イ$\boxed{}$ で最小値をとる。

$\boxed{3}$

$f(x)=x^2+ax+b$ とする。任意の１次式 $g(x)$ に対して，常に $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$［学習院大］

(1)　等式 $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=k^3$ を示せ.

(2)　(1) の結果を用いて $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ を計算せよ.

$\boxed{2}$［早稲田大］

x の整式で表される関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の条件を満たしている。

（ア）　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$　　（イ）　$\dfrac{d}{dx}\{(f(x))^2+(g(x))^2\}=4x-2$

（ウ）　$f(0)=1$　　（エ）　$g(0)=-2$

(1)　$f(x)+g(x)$ を求めよ。　　(2)　$f(x)g(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

２　定積分

$\boxed{3}$　$a \neq 0$，n を自然数とするとき，

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a}(ax+b)^{n+1} + C \quad (C \text{は積分定数})$$

$\boxed{4}$　$(x-\alpha)(x-\beta)$ の定積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\boxed{5}$　定積分と微分法

a を定数とするとき，x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である。

すなわち　$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★★☆

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^4 dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2(x-2)dx$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^2 (x-2)(x+3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} (x^2-4x+2)dx$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2x^2+x\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$　　(2) $f(x)=2x+\displaystyle\int_0^1 (x+t)f(t)\,dt$

$\boxed{4}$ ★★☆

等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^3-3x^2+x+a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★☆

関数 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x (3t^2+4t+1)dt$ の極値を求めよ。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3 (2x-5)^6 dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 x(x-2)^4 dx$　(3) $\displaystyle\int_{-3}^1 (x+3)^2(x-1)dx$

$\boxed{2}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^3 (2x+1)(x-3)dx$　(3) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{7}}^{2+\sqrt{7}} (x^2-4x-3)dx$

$\boxed{3}$

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x)=3x-\int_0^2 f(t)\,dt$　(2) $\displaystyle f(x)=x^3+\int_0^1 xf(t)\,dt$

(3) $\displaystyle f(x)=1+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$

$\boxed{4}$

次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2+5x-6$　(2) $\displaystyle\int_1^x tf(t)\,dt=x^3+2x^2+a$

$\boxed{5}$

$\displaystyle f(x)=\int_{-2}^x (t^2+t-2)dt$ のとき，関数 $f(x)$ の極値を求め，グラフをかけ。

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

等式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

$\boxed{2}$

$\displaystyle f(a)=\int_0^1(2ax^2-a^2x)dx$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ [早稲田大]

定数関数でない関数 $f(x)$ が $\displaystyle f(x)=x^2-\int_0^1(f(t)+x)^2dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [法政大]

関数 $\displaystyle f(x)=\int_c^x(t^2+at+b)dt$ は $x=1$，3 で極値をとり，$f(0)=\dfrac{16}{3}$ である。このとき，実数の定数 a，b，c の値を求めよ。

第２講　レベルＢ

1 [福島大]

関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の (A)，(B) を満たすとする。

(A)　$f(x)=x^2+2\int_0^x g(t)\,dt$　　(B)　$g(x)=f'(x)+\int_0^1 f(t)\,dt$

(1)　導関数 $f'(x)$ を $g(x)$ を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

2 [南山大]

関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x)+\int_1^x g(t)\,dt=\frac{5}{2}x^2-x+1,\quad f'(x)g(x)=6x^2-3x$$

を満たすとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

３　定積分と図形の面積

$\boxed{1}$　定積分と図形の面積

１　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_a^b f(x)dx$

２　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \leqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

３　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

$\boxed{\text{参考}}$　次の公式を利用すると，積分の計算がらくになることがある。

①　放物線に関する面積には

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

②　放物線と接線に関する面積には

$$\int (x+p)^2 dx=\frac{1}{3}(x+p)^3+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

2つの放物線 $y=x^2-2x+1$，$y=-x^2+4x+1$ と2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ ★★☆

(1)　放物線 $y=x^2-3x\ (1 \leqq x \leqq 4)$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=4$ で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

(2)　2つの曲線 $y=2x^2\ (0 \leqq x \leqq 3)$，$y=-x^2+6x\ (0 \leqq x \leqq 3)$ と直線 $x=3$ で囲まれた2つの部分の面積の和 S を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq 3x+4$，$y \leqq -3x+10$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

(1)　$\displaystyle\int_1^4 |x-2|\,dx$　を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$　を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★☆

次の放物線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2-3x+5$，直線 $y=2x-1$

(2)　放物線 $y=x^2-4x+1$，放物線 $y=-x^2+4x-5$

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

2 つの放物線 $y=x^2-3x$，$y=-x^2+6x$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$

(1)　曲線 $y=-x^2-4x+5\,(-2\leqq x\leqq 3)$ と x 軸および 2 直線 $x=-2$，$x=3$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

(2)　次の曲線や直線で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

$y=x^2-3\ (-1\leqq x\leqq 2)$，$y=-2x$，$x=-1$，$x=2$

$\boxed{3}$

座標平面上で連立不等式 $y\geqq x^2-1$，$y\leqq x+5$，$y\leqq -3x+9$ の表す領域の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,dx$　　(2)　$\displaystyle\int_0^3 |x^2+2x-3|\,dx$　　(3)　$\displaystyle\int_{-2}^3 |x^2-x|\,dx$

$\boxed{5}$

次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2+x-4$，$y=3x-1$　　(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(3)　$y=x^2+x+1$，$y=2x^2-3x+1$

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^3-6x$，$y=x^2$　　(2)　$y=|x^2-x-2|$，$y=x+1$

$\boxed{2}$［東北大］

a を $0<a<1$ を満たす定数とする.

(1)　関数 $f(x)=x|x-a|$ のグラフの概形をかけ.

(2)　積分 $g(a)=\int_0^1 x|x-a|dx$ の値を最小にする a の値を求めよ.

$\boxed{3}$

(1)　連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\geqq 2-x$，$y\leqq x+6$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1) の領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$［大阪府立大］

実数 $t\left(0\leqq t\leqq \frac{5}{2}\right)$ に対し，座標平面上の点 $\mathrm{P}(2t-5,\ 0)$ と $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ を考える。

(1)　放物線 $y=x^2$ の $0\leqq x\leqq t$ の部分と線分 OP および線分 PQ で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，O は原点を表す。

(2)　t が $0\leqq t\leqq \frac{5}{2}$ の範囲を動くとき，(1) で求めた面積の最大値を求めよ。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [慶応義塾大]

関数 $F(t)$ を $F(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|dx$ によって定義する。

(1)　実数 t で場合分けをして，$F(t)$ を t の式で表せ。

(2)　t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの $F(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ [東京都立大]

$0 \leqq a \leqq 2$ とする．放物線 $y=3x(x-2)$ と直線 $x=a$，$x=a+1$ および x 軸で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．

(1)　$S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [津田塾大]

連立不等式 $\begin{cases} \log_2 y \geqq \log_2 x - 1 \\ \log_2 y \leqq -2\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2(3-x) \end{cases}$ の表す領域を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{4}$ [慶応義塾大]

$f(x)=x^3-3x^2+2x$，$g(x)=ax(x-2)$　（ただし，$a>1$）とする。

曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の交点の x 座標は ${}^{ア}\boxed{}$ である。この２曲線によって囲まれる２つの部分の面積が等しくなるのは $a={}^{イ}\boxed{}$ のときである。

第４講　面積（発展）例題

$\boxed{1}$ ★★☆

放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式　　　　　　(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

$\boxed{2}$ ★★☆

2 つの放物線 C_1：$y=x^2$ と C_2：$y=x^2-6x+15$ の共通接線を ℓ とする。

(1)　ℓ の方程式を求め，C_1，C_2 および ℓ を図示せよ。

(2)　C_1，C_2 および ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

曲線 $y=-x^3+5x$ 上に点 A $(-1,\ -4)$ をとる。

(1)　点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+5x$ と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★★

a は $0<a<3$ を満たす定数とする。放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★★

放物線 $y=x^2$ と点 $(2,\ 6)$ を通る直線とで囲まれる部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

放物線 $y=x^2-2x-3$ ……① と，x 軸上に接点をもつ ① の２つの接線とによって囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

２つの放物線 C_1：$y=x^2-5x+7$，C_2：$y=x^2+3x-1$ の両方に接する直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．

(2)　放物線 C_1，C_2 と直線 l とで囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{3}$

曲線 $y=x^3-x^2-12x$ と，その曲線上の点 $(-1,\ 10)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$

放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。また，この囲まれた部分が直線 $y=mx$ によって上側と下側に１：７の面積比で分けられるとき，定数 m の値を求めよ。

$\boxed{5}$

放物線 $y=x^2+x-1$ と，原点を通る傾き m の直線で囲まれた図形の面積が最小となるように，m の値を定めよ。また，そのときの面積を求めよ。

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

放物線 $y=x^2-x+3$ に点 $(1,\ -1)$ から引いた２つの接線と放物線とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$［城西大］

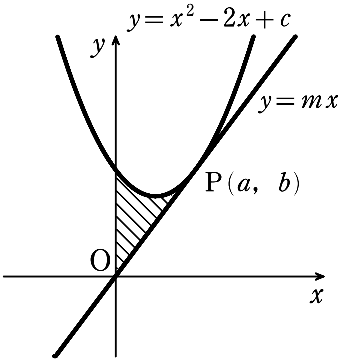
放物線 $y=x^2+1$ 上の点 P における接線と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積は，P の位置によらず一定であることを示せ.

$\boxed{3}$［一橋大］

$0<t<1$ とし，放物線 $C：y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を ℓ とする。
C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と ℓ と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。

$\boxed{1}$［岩手大］

図のように，原点 O を通る直線 l：$y=mx$ が，第１象限の点 P$(a,\ b)$ で，放物線 C：$y=x^2-2x+c$ に接している．このとき，直線 l，y 軸，および放物線 C で囲まれる領域 (図の斜線部分) の面積 S を a で表せ．



$\boxed{2}$［大阪府立大］

$0<m<a$ である定数 m，a に対して，曲線 $y=|x^2-ax|$ と直線 $y=mx$ で囲まれる図形を D とする。図形 D の直線 $y=mx$ より上の部分と下の部分の面積が等しいとき，m を a を用いて表せ。

章末問題A

1 [関西学院大]

a，b，c を定数とし，$a \fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=ax-1$ および $g(x)=bx+c$ が

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx=1,\ \int_0^1 f(x)g(x)dx=0,\ \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx=1$$

を満たすとき，a，b，c の値を求めよ。

2 [名古屋大]

$f(x)$ が x の 1 次式で $\int_0^1 f(x)dx=1$ のとき，$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx>1$ であることを証明せよ。

3 [滋賀大]

$f(x)=\int_1^x (t^2-6t+8)dt$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 5$ における最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

4 [東北大]

a を正の定数とする。$f(x)=ax+\int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また，そのときの $f(x)$ を求めよ。

5 [崇城大]

xy 平面において，連立不等式 $y \geqq |x^2-1|$，$y \leqq -x^2+2x+3$ の表す領域を D とする。

(1)　D を図示せよ。

(2)　D の面積を求めよ。

6 [京都大]

2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

7

放物線 $y=x^2+2x+k$ に原点から引いた 2 本の接線は垂直である。

(1)　k の値を求めよ。

(2)　放物線と 2 本の接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{8}$［福岡大］

$a>0$ とし，放物線 C：$y=\dfrac{1}{2}ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 2a)$ をとる。直線 ℓ は，点 P での C の接線と P で直交しているとする。

(1)　直線 ℓ の y 切片を a を用いて表せ。

(2)　放物線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。また，その面積 S の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$［大分大］

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx$ で囲まれる部分の面積を 2 等分する直線 $x=p$ を求めよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

章末問題B

$\boxed{1}$［東京大］

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S=\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，

S がとりうる値の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$［工学院大］

2 つの等式 $\displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\,dt=xg(x)+x+a$，$g(x)=x^2+x\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,dt+\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ を満たす定数

a および関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$［北海道薬科大］

x の関数 $f(x)$，$g(x)$ が次の条件 ①，② を満たしている。

$\displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\,dt=xg(x)+ax+2$ （a は実数） …… ①

$g(x)=x^2-2x\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,dt+1$ …… ②

このとき，定数 a の値と関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$［京都大］

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_{0}^{x} f(y)\,dy+\int_{0}^{1}(x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。

$\boxed{5}$［東京工業大］

点 P から放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A，B とし，線分

PA，PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA，PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$［大阪市立大］

0 以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_{0}^{1}\left|x^2-t^2\right|dx$ とする。

(1) $F(t)$ を t を用いて表せ。

(2) $t \geqq 0$ において，関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [京都大]

放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ．

$\boxed{8}$ [東京大]

連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$，$y+x^2-2x-3\leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。　(2) D の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ [一橋大]

xy 平面上に放物線 C：$y=-3x^2+3$ と 2 点 A(1，0)，P(0，$3p$) がある。線分 AP と C は，A とは異なる点 Q を共有している。

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

$\boxed{10}$ [京都大]

α，β を実数とする。xy 平面内で，点 (0，3) を中心とする円 C と放物線

$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 P$(\sqrt{3}$，0) を共有し，更に P における接線が一致している。

(1) α，β の値を求めよ。

(2) 円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

章末問題C

$\boxed{1}$ [山口大]

t が区間 $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$ を動くとき，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 x|x-t|\,dx$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ [東京大]

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\displaystyle\int_0^2 |f'(x)|\,dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ [大阪大]

放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m \fallingdotseq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ。

$\boxed{4}$ [京都大]

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ [一橋大]

p，q を，$p<q$ を満たす実数とする。実数 a，b に対して，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ のすべての解は p 以上 q 以下の実数である。このような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を ab 平面に図示せよ。また，その領域の面積を p，q の式で表せ。

$\boxed{6}$ [大阪大]

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。