第６章

～　積分法の応用　～

7　面積

1　曲線 $y=f(x)$ と面積

区間$[a,\ b]$で常に $f(x)\geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_a^b f(x)dx$

2　２曲線間の面積

区間$[a,\ b]$で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

3　曲線 $x=g(y)$ と面積

区間 $c\leqq y\leqq d$ で常に $g(y)\geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および２直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は　　$S=\int_c^d g(y)dy$

第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ ★★☆

$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin 2x$， $y=\cos 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

曲線 $y=(x^2-6x+8)e^{-x}$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

直線 $y=ex$ と 曲線 $y=xe^x$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

$\boxed{5}$ ★★☆

放物線 $x=-y^2+2y$ と y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{6}$ ★★★

曲線 $y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積を曲線 $y=a\cos x$ が 2 等分するように，定数 a の値を定めよ。

$\boxed{7}$ ★★★

$a>0$ とし，$y=x^2$ のグラフが $y=a\log x$ のグラフに接しているとする．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=a\log x$ と x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ．

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の曲線や直線，および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=e^x$，$x=0$，$x=2$　　(2)　$y=\dfrac{3}{x}$，$x=1$，$x=4e$

(3)　$y=\sqrt[3]{x}$，$x=1$，$x=8$　　(4)　$y=\tan x\ \left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi\right)$，$x=\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{2}$

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$

曲線 $y=(2x^2-7x+5)e^x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$

次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=xe^{1-x}$，$y=x$　　(2)　$y=x\sqrt{3-x}$，$y=x$　　(3)　$y=x^2$，$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$\boxed{5}$

次の曲線や直線，および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=3y-y^2$　　(2)　$x=3e^y$，$y=2$，x 軸

$\boxed{6}$

$a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{7}$

2 曲線 $y=\sqrt{x}$, $y=a\log x$ が 1 点のみを共有するように正の実数 a を定め，このとき，2 曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=(-2x+8)\sqrt{x-1}$，x 軸　　(2)　$y=10-9e^{-x}-e^{x}$，x 軸

(3)　$y=(1+\cos x)^2\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$，x 軸　　(4)　$x=y^2-1$，$x-y-1=0$

$\boxed{2}$

曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ で囲まれた部分の面積を次の方法で求めよ。

(1)　x について積分　　(2)　y について積分

$\boxed{3}$ [鳥取大]

曲線 C_1：$y=xe^{-x}$ と曲線 C_2：$y=2xe^{-2x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の座標を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ [群馬大]

$0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の実数 a の値を定めよ。

$\boxed{5}$ [工学院大]

曲線 C_1：$y=k\sin x$ $(0<x<2\pi)$ と，曲線 C_2：$y=\cos x$ $(0<x<2\pi)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$k>0$ とする。

(1)　C_1，C_2 の 2 交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\sin\alpha$，$\sin\beta$ を k を用いて表せ。

(2)　C_1，C_2 で囲まれた図形の面積が 10 であるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{6}$ [信州大]

曲線 $y=\log x$ が曲線 $y=ax^2$ と接するように正の定数 a の値を定めよ。また，そのとき，これらの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{7}$

曲線 $y=\log ax$ と，原点からこの曲線に引いた接線と x 軸とで囲まれた部分の面積が e であるとき，正の定数 a の値を求めよ。

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$

曲線 $y=\log x$ と x 軸と 2 直線 $x=t$，$x=t+1$ $(t>0)$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

$\boxed{3}$［富山県立大］

2 つの曲線 C_1：$y=x\log x$，C_2：$y=2x\log x$ について，次の問いに答えよ。ただし，$x>0$ である。

(1)　C_1 と C_2 に共通する接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C_1，C_2 および ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{4}$［北海道大］

a と b を正の実数とする。$y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y=b\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする。

(1)　P の x 座標を t とするとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ。

(2)　C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ。

(3)　C_1，C_2 と 直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とするとき，$T=2S$ となるための条件を a と b で表せ。

$\boxed{5}$

方程式 $\sqrt{2}(x-y)=(x+y)^2$ で表される曲線 A について，次のものを求めよ。

(1)　曲線 A を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる曲線の方程式

(2)　曲線 A と直線 $x=\sqrt{2}$ で囲まれる図形の面積

7　面積

$\boxed{4}$　**陰関数と面積**

陰関数：$f(x,\ y)=0$（主に２次曲線）で囲まれた図形の面積は，対称性を利用して求めるとよい。

$\boxed{5}$　**媒介変数表示と面積**

y は x の関数とする。曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ で囲まれた部分の面積 S は，$a=f(\alpha)$，$b=f(\beta)$ で常に $y\geqq 0$ ならば

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$$

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★★☆

楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ ★★☆

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$y^2=x^2(3-x^2)$$

$\boxed{3}$ ★★★

2 つの楕円 $x^2+3y^2=4$ …… ①，$3x^2+y^2=4$ …… ② がある。

(1)　2 つの楕円の 4 つの交点の座標を求めよ。

(2)　2 つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★★

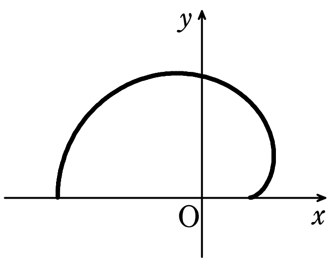
曲線 $5x^2+2xy+y^2=16$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★☆

曲線 $x=\sin\theta$，$y=\sin 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{6}$ ★★★

媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，
$y=2\sin t-\sin 2t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と表される右図の曲線と，
x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$2x^2+3y^2=6$　　　　　　　(2)　$3x^2+4y^2=1$

$\boxed{2}$

次の曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y^2=x^2(4-x^2)$　　　　　　　(2)　$y^2=(x+3)x^2$

$\boxed{3}$

2 つの楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　4 つの交点の座標を求めよ．

(2)　2 つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ．

$\boxed{4}$

曲線 $2x^2+2xy+y^2=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$

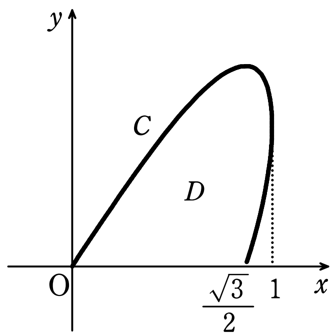
媒介変数 t によって，$x=4\cos t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{6}$

座標平面上で，媒介変数表示

$$x=\sin 2\theta,\quad y=\sin 3\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

が定める図のような曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

楕円 $\dfrac{(x-3)^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1$ ……①の内部の面積 S を次の方法で求めよ。

(1)　①の上側を $y_1=f(x)$，下側を $y_2=g(x)$ として　$S=\displaystyle\int_0^6(y_1-y_2)dx$

(2)　①を $x(\theta)=3-3\cos\theta$，$y(\theta)=2+2\sin\theta$ として　$S=\displaystyle\int_0^{2\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$

$\boxed{2}$

次の図形の面積 S を求めよ。

(1)　曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形

(2)　曲線 $y^2=(x+3)x^2$ で囲まれた図形

(3)　曲線 $2x^2-2xy+y^2=4$ で囲まれた図形

$\boxed{3}$

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=4\cos\theta$，$y=3\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

(2)　$x=\tan\theta$，$y=\cos2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$，$x$ 軸

(3)　$x=\cos^4\theta$，$y=\sin^4\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸

(4)　$x=t^3$，$y=1-t^2$，x 軸

(5)　$x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

$\boxed{4}$ [筑波大，大阪工業大]

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$

(2)　$x=\cos t$，$y=2\sin^3 t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{5}$

t を媒介変数とするとき $x=3t^2$，$y=3t-t^3$ で表される曲線を図示せよ。また，この曲線によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$

極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線上の点と極Ｏを結んだ線分が通過する領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ と表される。これを用いて，極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線上の点と極Ｏを結んだ線分が通過する領域の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ ［東京工業大］

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1)　$\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2)　C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$［広島大］

$0<b<a$ を満たす定数 a，b に対し，2 つの楕円 A：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B$：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ を考える。また，θ は $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a，b，θ を用いて表せ。

$\boxed{2}$

サイクロイド $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とするとき

(1)　C 上の点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,\ 1\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　接線 ℓ と y 軸および C で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$［上智大］

曲線 $\begin{cases} x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}} \\ y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

８　体積

1　定積分と体積

区間$[a,\ b]$において，x軸に垂直な平面による切り口の面積が$S(x)$であるような立体の体積Vは

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

2　回転体の体積

１　曲線$y=f(x)$とx軸および２直線$x=a$，$x=b$で囲まれた部分が，x軸の周りに１回転してできる回転体の体積Vは

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx=\pi\int_a^b y^2 dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

２　曲線$x=g(y)$とy軸および２直線$y=c$，$y=d$で囲まれた部分が，y軸の周りに１回転してできる回転体の体積Vは

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2 dy=\pi\int_c^d x^2 dy \qquad \text{ただし，} c<d$$

研究　バウムクーヘン分割

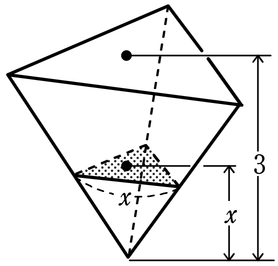
曲線$y=f(x)$とx軸および２直線$x=a$，$x=b$で囲まれた部分を，y軸の周りに１回転させてできる立体の体積Vは

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

第３講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

底から x cm の高さにある平面での切り口が，1 辺 x cm の正三角形となる容器がある。深さが 3 cm のとき，この容器の体積 Vcm^3 を求めよ。



$\boxed{2}$★★☆

関数 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の表す曲線上に点 P がある。点 P を通り y 軸に平行な直線が x 軸と交わる点を Q とする。線分 PQ を 1 辺とする正方形を xy 平面の一方の側に垂直に作る。点 P の x 座標が 0 から π まで変わるとき，この正方形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$★☆☆

次の曲線や座標軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=1+\cos x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$，x 軸　　　(2)　$9x^2+4y^2=36$

$\boxed{4}$★★☆

2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{5}$★★☆

曲線 $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=-1$，y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{6}$★★★

関数 $f(x)=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ について，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を，バウムクーヘン分割の考え方を用いて求めよ。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

底からの高さが x cm の平面で切った切り口が，半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円である容器がある。この容器の底から 8 cm までの部分の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$

xy 平面上の曲線 C： $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点を P$(x,\ y)$ として，x 軸上に点 Q$(x,\ 0)$ をとり，線分 PQ を 1 辺とする正方形 L を xy 平面に垂直に立てる。ただし，P と Q が一致するときは，L は 1 点であるとする。点 P が曲線 C 上を動くとき，L が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$

次の曲線や直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$，$y=0$　　　(2)　$y=e^x$，$x=0$，$x=2$，$y=0$

(3)　$9x^2+4y^2=36$

$\boxed{4}$

2 曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi\right)$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{5}$

次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{x}$，$y=1$，$y=2$，$x=0$　　　(2)　$y=\log x$，$y=0$，$y=1$，$x=0$

$\boxed{6}$

曲線 $y=e^x$，直線 $x=1$，x 軸，y 軸によって囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回させてできる立体の体積を，バウムクーヘン分割の考え方を用いて求めよ。

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

x 軸上に点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ をとる。P を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=4-x^2$ との交点を Q とし，線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を x 軸に垂直な平面内に作る。P が点 $(-1,\ 0)$ から点 $(1,\ 0)$ まで移動するとき，正三角形 PQR が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$［奈良県立医科大］

$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の範囲で，曲線 $y=\cos x$ と曲線 $y=\cos 2x$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$

次の曲線や直線で囲まれた部分を，［　］内の軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2\sin 2x$，$y=\tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　［x］

(2)　$y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=-\dfrac{2}{\pi}x+1$　［x］

(3)　$y=\log(x^2+1)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，$y=\log 2$，y 軸　［y］

(4)　$y=e^x$，$y=e$，y 軸　［y］　(5)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　［y］　(6)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$　［y］

$\boxed{4}$［早稲田大］

放物線 $y=-x^2+2x+2$ と x 軸によって囲まれた部分を D とする。

(1)　D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(2)　D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$［東京理科大，早稲田大］

(1)　曲線 $y=x^3-2x^2+3$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=xe^x+\dfrac{e}{2}$ について，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(1)$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(3)　xy 平面上において $y=\cos x$，$y=\dfrac{3}{2\pi}x$ および x 軸で囲まれる $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{1}$［筑波大］

水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに角 α 傾けたとき，水面が h だけ下がり，こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が $11:5$ になった。h と α の値を求めよ。ただし，α は弧度法で答えよ。

$\boxed{2}$［電気通信大］

a を正の定数とする。曲線 $C_1：y=\log x$ と曲線 $C_2：y=ax^2$ が共有点 T で共通の接線 ℓ をもつとする。また，C_1 と ℓ と x 軸によって囲まれる部分を S_1 とし，C_2 と ℓ と x 軸によって囲まれる部分を S_2 とする。次のものを求めよ。

(1)　a の値，および直線 ℓ の方程式

(2)　S_1 を x 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積

(3)　S_2 を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積

$\boxed{3}$［東北大］

$0<t<3$ のとき，連立不等式 $\begin{cases} 0\leqq y\leqq \sin x \\ 0\leqq x\leqq t-y \end{cases}$ の表す領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t の値を求めよ。

$\boxed{4}$［茨城大］

a，b を正の数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形を直線 $x=2a$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とおく。a，b が $a^2+b^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，V の最大値を求めよ。

８　体積

$\boxed{4}$　媒介変数表示と体積

１　y は x の関数とする。曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V は，

$a=f(\alpha)$，$b=f(\beta)$，$a<b$ のとき

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_\alpha^\beta \{g(t)\}^2 f'(t)\,dt$$

$\boxed{5}$　斜軸回転体の体積

曲線 C：$y=f(x)$ と 直線 ℓ： $y=mx+n$ で囲まれた部分で囲まれた部分が，直線 ℓ の周りに１回転してできる回転体の体積は以下のようにして求める。

直線 ℓ 上のある点 H と，点 H を通り直線 ℓ に垂直な直線と曲線 C との交点 P との距離，すなわち PH を 直線 ℓ の周りに１回転させた図形（円）を求めて積分する。

９　曲線の長さ

$\boxed{1}$　媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

$\boxed{2}$　曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さ L は　$L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

１０　道のり

$\boxed{1}$　速度と位置

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=f(t)$，速度を v とすると

P の $t=t_1$ から $t=t_2$ までの 位置の変化量は　　$f(t_2)-f(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}v\,dt$

時刻 $t=t_2$ における P の座標は　　$x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}v\,dt$

$\boxed{2}$　道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とすると，時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は　　$s=\int_{t_1}^{t_2}|v|\,dt$

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を $(x,\ y)$，速度を $\vec{v}$ とすると，時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}|\vec{v}\,|\,dt$$

第４講　例題

$\boxed{1}$★★☆

曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれる部分を，x 軸の周りに１回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$★★★

直線 $y=x$ と曲線 $y=x^2-x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに１回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$★☆☆

曲線 $x=3t^2$，$y=3t-t^3$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$ の長さ L を求めよ。

$\boxed{4}$★☆☆

曲線 $y=\log(1-x^2)$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ の長さ L を求めよ。

$\boxed{5}$★★☆

座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=2t^2+1$，$y=t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=1$ までにＰが通過する道のり s を求めよ。

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\cos^2\theta\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに１回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$

放物線 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに１回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$x=-3t$，$y=4t$　$(0\leqq t\leqq 2)$

(2)　$x=\sqrt{3}\,t^2-1$，$y=t^3-t$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$

(3)　$x=\cos 2t$，$y=2t+\sin 2t$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4)　$x=e^{\theta}\cos\theta$，$y=e^{\theta}\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

$\boxed{4}$

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$　　(2)　$y=\sqrt{4-x^2}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

$\boxed{5}$

時刻 t における動点 P の座標が $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ で与えられている。$t=1$ から $t=2$ までに P が動いた道のりを求めよ。

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$［大阪工業大］

曲線 C：$x=\cos t$，$y=2\sin^3 t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。

(1)　曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　(1) で考えた図形を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$［名古屋市立大］

次の図形を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

(2)　曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と 2 直線 $y=x$，$x+y=\pi$ で囲まれた図形

$\boxed{3}$

次の曲線の長さ L を求めよ。

$$x=2(t-\sin t),\quad y=2(1-\cos t)\quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

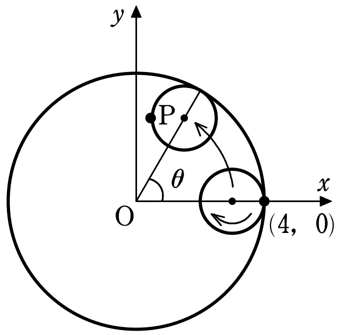
$\boxed{4}$

$a>0$ とする。カテナリー $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ の上の定点 A$(0,\ a)$ から点 P$(p,\ q)$ までの弧の長さを l とし，この曲線と x 軸，y 軸および直線 $x=p$ で囲まれる部分の面積を S とする。このとき，$S=al$ であることを示せ。

第４講　レベルＢ

1 ［北海道大］

xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし，初めに点 P は点 $(4,\ 0)$ の位置にあるものとする。



(1)　図のように，x 軸と円 C の中心のなす角度が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡の長さを求めよ。

2 ［芝浦工業大］

曲線 C：$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の 2 端点を A，B とする。

(1)　C はある直線 ℓ に関して対称である。ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C と線分 AB とで囲まれる図形を ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

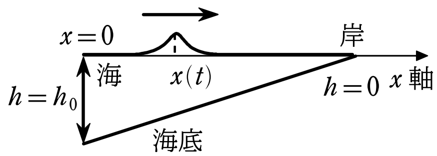
3 ［鳥取大］

(1)　関数 $k(x)=x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ の導関数 $k'(x)$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r=\theta$ で定義される曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さ L を求めよ。

4 ［北海道大］

右図のように水深 h が一定勾配で浅くなる海がある。位置 x における水深は $h(x)=h_0-ax$ で与えられる。ただし，$a>0$，$h_0>0$ とする。時刻 $t=0$ のとき，位置 $x=0$ で津波が発生した。



時刻 t での津波の進行速度 $\dfrac{dx}{dt}$ は $\sqrt{gh(x)}$ に等しいことが知られている。ここで g は正の定数である。津波が位置 x に到達する時刻を $t(x)$ とする。

(1)　$\dfrac{dt}{dx}$ を x で表せ。

(2)　津波が水深 $h=d$ となる位置に到達する時刻 T_d および $T=\lim\limits_{d\to 0} T_d$ を求めよ。ただし，d は $0<d<h_0$ とする。また時刻 $\dfrac{T}{2}$ での津波の位置の座標を求めよ。