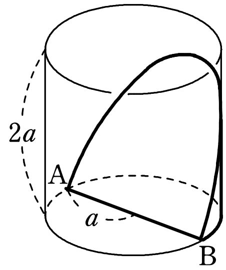
$\boxed{1}$★★★

底面の半径が a，高さが $2a$ の直円柱がある。この底面の直径 AB を含み，底面と 60° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。



$\boxed{2}$★★★

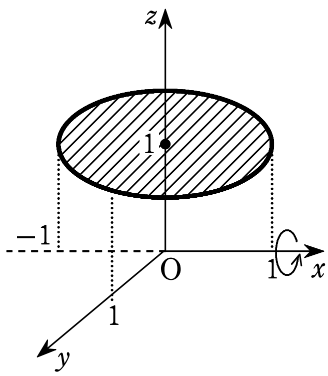
$V=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2\leqq 1\right\}$ とする。

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　V の体積を求めよ。

$\boxed{3}$★★★

空間に円盤 $x^2+y^2\leqq 1$，$z=1$ がある。これを x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。



$\boxed{4}$★★★

連立不等式

$$y^2\leqq 1-x^2,\ z\leqq 2x,\ z\leqq -2x+2,\ x\geqq 0,\ z\geqq 0,$$

を満たす立体 K の体積 V を求めよ。

第５講　立体の切り口と体積（発展）　例題演習

$\boxed{1}$

底面の半径が 2，高さも 2 の直円柱がある。この底面の直径 AB を含み，底面と 45° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{2}$

不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2)\leqq\log 2$ の定める立体を A とする。

(1)　A の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　A の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$

xy 平面において，不等式 $(x-2)^2+y^2\leqq 1$ で表される領域を D とする。xyz 空間において，D を y 軸の周りに 1 回転してできる立体を K とする。立体 K の体積 V を求めよ。

$\boxed{4}$

連立不等式

$$y^2\leqq 1-z^2,\quad x^2\leqq 1-z^2,\quad y\leqq\frac{1}{2}$$

を満たす立体 K の体積 V を求めよ。

第５講　レベルＡ

$\boxed{1}$

定積分を用いて次の立体の体積を求めよ。

(1)　1 辺の長さが 5 の正方形を底面とする高さ 4 の四角錐

(2)　半径が 3 の球

(3)　1 辺の長さが 4 の正四面体

$\boxed{2}$

球を平面で 2 つに切って，2 つの部分の体積の比が 20：7 になるようにするには，どのように切ればよいか。

$\boxed{3}$［北海道大］

xyz 空間において，連立不等式

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$$

の表す立体を考える。

(1)　この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　この立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$［東北大］

xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を ℓ とし，ℓ を z 軸の周りに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

第５講　レベルＢ

$\boxed{1}$［京都大］

次の式で与えられる底面の半径が2，高さが1の円柱 C を考える。

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で2つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ。

$\boxed{2}$［京都大］

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で

$$|x|\leqq\frac{e^y+e^{-y}}{2}-1,\quad 0\leqq y\leqq\log a$$

で与えられる図形 D を考える。ただし a は1より大きい定数とする。
この図形 D を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$［大阪市立大］

座標空間内で，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 1,\ z+2x^2-x^4\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。

第６講　総復習問題

$\boxed{1}$ [筑波大]

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x-\sin x)$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$h(x)=\sin x$

とおく。3 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1，C_2，C_3 とする。

(1)　C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ [信州大]

(1)　曲線 $C_1:6y-x^2=k$ と曲線 $C_2:y=\log(x+2)$ が共有点をもち，この点で 2 つの曲線の接線が一致するとき，定数 k の値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。

(2)　(1) のとき，曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$ [大阪市立大]

定数 a を $a>0$ として，曲線 $C_1:y=\dfrac{1}{a}\log x$ と曲線 $C_2:y=e^{ax}$ を考える。

(1)　曲線 C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称であることを示せ。

(2)　曲線 C_1 と直線 $y=x$ が接するように a の値を定めよ。

(3)　a が (2) で定められた値のとき，曲線 C_1，C_2 と x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ [東北大]

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2)　(1) の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

$\boxed{5}$ [神戸大]

不等式 $-\sin x\leqq y\leqq\cos 2x$，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義される xy 平面内の領域を K とおく。

(1)　K の面積を求めよ。

(2)　K を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

6 [大阪市立大]

正の定数 t について，xy 平面上の曲線 $y=\log x$ と x 軸および 2 直線 $x=t$，$x=t+\dfrac{3}{2}$ とで囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。

(1)　$t>0$ において $V(t)$ が最小になる t の値を求めよ。

(2)　$t>0$ における $V(t)$ の最小値を求めよ。

7 [神戸大]

座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0\leqq t\leqq 1$ を用いて $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ と定める。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

8 [横浜国立大]

xy 平面上の $x\geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ により囲まれる部分を D とする。D を直線 $y=x$ の周りに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき

(1)　V_n を求めよ。　　　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

9 [大分大]

中心が原点 O で半径が a の定円 C_1 上を，半径 $\dfrac{a}{4}$ の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転する。円 C_2 上の点 P は最初に点 A $(a,\ 0)$ にあるとする。

円 C_2 の中心を B とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を a，θ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を a，θ で表せ。

(3)　$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，動点 P が移動する距離を求めよ。

10 [東京大]

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2\leqq r^2,\ \ y^2+z^2\geqq r^2,\ \ z^2+x^2\leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

第６講　総復習問題　類題

1 [大阪市立大]

座標平面の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲において，2つの曲線 $y=\cos x$ と $y=\sin 2x$ の交点の座標を $(a,\ b)$ とし，2つの曲線 $y=\cos x$ と $y=\tan x$ の交点の座標を $(c,\ d)$ とする。

(1)　a，b および d^2 の値を求めよ。　　(2)　$c>a$ であることを示せ。

(3)　連立不等式 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\cos x \leqq y \leqq \sin 2x$，$y \geqq \tan x$ の表す領域を図示し，その領域の面積を求めよ。

2 [大阪市立大]

a と b は実数で，$a>0$ とする。

(1)　2つの曲線 $y=\dfrac{a}{2}x^2+b$ と $y=\log x$ がただ1つの共有点をもつとき，a を用いて b を表せ。

(2)　(1)で求めた関係式を満たす a，b に xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を対応させるとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の軌跡となる曲線を C とする。曲線 C と曲線 $y=\log x$ および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

3 [神戸大]

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える。$f(x)=e^x-2$ であり，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは原点に関して対称であるとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)$ を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ。

(3)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 [大阪市立大]

次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^e (\log y)^2 dy$ の値を求めよ。

(2)　$f(x)=\tan x$ とする。関数 $y=f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ をもつ。定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ および $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ の値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e \sqrt{\log y}\,dy$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ [京都大]

2つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。

$\boxed{6}$ [大阪大]

t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と曲線 $y=2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

(1)　D を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$ [神戸大]

$x=\sin t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を C とおく。

(1)　y を x の式で表せ。　　(2)　x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3)　D を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{8}$ [信州大]

(1)　関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+x^5+x^3}{x^{2n}+x^2+1}$ について，関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(2)　点 $(-1,\ -1)$ と点 $(1,\ 1)$ を結ぶ線分と $y=f(x)$ のグラフで囲まれる部分を，直線 $y=x$ の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

$\boxed{9}$ [早稲田大]

円 C：$x^2+y^2=9$ の内側を半径1の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

(1)　時刻 $t=0$ において点 $(3,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。ただし，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。

(2)　(1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

$\boxed{10}$ [東京工業大]

xyz 空間内の3つの部分集合

$A=\{(x,\ y,\ z)\mid |x|\leqq 1,\ y^2+z^2\leqq 1\}$，$B=\{(x,\ y,\ z)\mid |y|\leqq 1,\ x^2+z^2\leqq 1\}$，

$C=\{(x,\ y,\ z)\mid |z|\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 1\}$　　の和集合 $A\cup B\cup C$ の体積を求めよ。

章末問題A

$\boxed{1}$［東京海洋大］

曲線 $y=\cos x$ と，点 $(t,\ \cos t)$ $\left(ただし\ 0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ におけるこの曲線の接線で挟まれ，

x 座標が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の最小値と最大値を求めよ．

$\boxed{2}$［神戸大］

座標平面上の 2 つの曲線 $y=\dfrac{x-3}{x-4}$，$y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$［神戸大］

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$　$(x>0)$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然対数の底 e について，$e=2.718\cdots\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを証明なしで用いてよい。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　区間 $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$，および直線 $x=e$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

$\boxed{4}$［大阪府立大］

関数 $f(x)=(x+1)e^{2x-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x>1$ のとき，$f(x)>2e^x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x<1$ のとき，$f(x)<2e^x$ が成り立つことを示せ。

(3)　2 つの曲線 $y=2e^x$，$y=f(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$［神戸大］

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=|\,x-a\,|\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．また，$y=f(x)$ のグラフと，x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とする．

(1)　S を a を用いて表せ．

(2)　a が $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ．

$\boxed{6}$ [東北大]

直線 ℓ は曲線 C_1：$y=e^x$，C_2：$y=e^{2x}$ の両方に接する。このとき，ℓ と C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ [玉川大]

定積分 $S=\int_0^a e^x dx+\int_1^b \log y\,dy$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0, b>1$ とする．

(1) S を求めよ．

(2) $y=e^x$ のグラフを描き，この図において S はどの部分の面積を表すかを斜線で示せ．

(3) S と ab との大小を比較せよ．また，$S=ab$ となるのはどういう場合か．

$\boxed{8}$ [京都大]

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{9}$ [京都工芸繊維大]

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とする。xy 平面において，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=\sin^2 t$ によって囲まれる部分と，楕円 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=\cos^2 t$ によって囲まれる部分の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ を t を用いて表せ。

$\boxed{10}$ [山形大]

極方程式 $2r^2\cos^2\theta+r^2-6r\sin\theta=3$ で与えられる曲線がある．次の問いに答えよ．

(1) この曲線を x，y 座標に関する方程式で表し，そのグラフの概形をかけ．

(2) この曲線の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{11}$ [東京大]

$f(x)=\sin x$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V は $V=2\pi\int_0^\pi xf(x)\,dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ。

$\boxed{12}$ [神戸大]

a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=-\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。

(1) 図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2) a が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ。

(3) 図形 G を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。

$\boxed{13}$ [茨城大]

a，b を正の数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形を直線 $x=2a$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とおく。a，b が $a^2+b^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，V の最大値を求めよ。

$\boxed{14}$ [京都大]

$f(x)=x\sin x$ $(x \geqq 0)$ とする．点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=f(x)$ の法線と，$y=f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分，および y 軸とで囲まれる図形を考える．この図形を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

$\boxed{15}$ [京都大]

$y=xe^{1-x}$ と $y=x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{16}$ [大阪大]

曲線 C：$y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 上に点 A$\left(a,\ \dfrac{e^a}{1+e^a}\right)$ をとる。ただし，$a>0$ とする。

(1) C 上にあり A とは異なる点 P$\left(p,\ \dfrac{e^p}{1+e^p}\right)$ について，そこでの接線が A での接線と平行となるように p の値を定めよ。

(2) p は (1) で定めた値とする。C と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=p$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ [京都大]

媒介変数表示された曲線 C：$x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の長さ L を求めよ.

$\boxed{18}$ [北海道大]

次の条件 [1]，[2] を満たす曲線 C の方程式 $y=f(x)\ \ (x \geqq 0)$ を求めよ。

[1]　点 $(0,\ 1)$ を通る。

[2]　点 $(0,\ 1)$ から曲線 C 上の任意の点 $(x,\ y)$ までの曲線の長さ L が $L=e^{2x}+y-2$ で与えられる。

$\boxed{19}$ [北海道大]

曲線 $y=x^2\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸の周りに 1 回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1)　水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

$\boxed{20}$ [大阪市立大]

半径 1 の円柱を，底面の直径を含み底面と角 $\alpha \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える。ただし，円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする。

(1)　この立体の体積 V を求めよ。

(2)　切り口の面積 A を求めよ。

$\boxed{21}$ [大阪市立大]

連立不等式 $0 \leqq z \leqq e^{-(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす座標空間の点 $(x,\ y,\ z)$ 全体が作る領域を M とする.

(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ とするとき，平面 $z=t$ による M の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.

(2)　M の体積を求めよ.

章末問題B

1 [大阪市立大]

$a>0$ を満たす定数 a に対して，曲線 C：$y=\log(x+1)$ 上に点 O $(0,\ 0)$ と点 A $(a,\ \log(a+1))$ をとる。また，この曲線 C 上を動く点 P $(t,\ \log(t+1))$ を考える。ただし，$0<t<a$ とする。曲線 C と直線 OP で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 C と直線 PA で囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) $x>0$ に対して，$\dfrac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$ が成り立つことを示せ。

(2) S_1，S_2 を a と t を用いて表せ。

(3) S_1+S_2 を最小にする t を求めよ。

2 [新潟大]

e を自然対数の底とし，t は $-1\leqq t\leqq e$ を満たすとする。x，y に関する連立不等式

$\begin{cases}(y-e^{-x})(y-t)\leqq 0\\ -1\leqq x\leqq 1\end{cases}$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $S(t)$ の最大値，最小値を求めよ。

3 [東京都立大]

t を実数として，平面上の直線 l_t：$tx+(1-t)y=t(1-t)$ を考える．t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$x>0$，$y>0$ の範囲で l_t が通過する部分を図示し，その面積を求めよ．

4 [京都大]

$\alpha>0$ とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$ を考える．

$y=f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α で表せ．ただし，e は自然対数の底である．

$\boxed{5}$ [大阪教育大]

実数 a，b は $a>b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれる領域を A，楕円 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ で囲まれる領域を B で表す。共通部分 $A\cap B$ の面積を S，和集合 $A\cup B$ の面積を T とする。

(1) A の面積が πab であることを証明せよ。

(2) B に含まれて A に含まれない部分の面積を a，b，α を用いて表せ。ただし，

$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(3) $T=2S$ であるとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ [神戸大]

媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ，C の概形をかけ。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{7}$ [横浜国立大]

O を原点とする xy 平面上に曲線

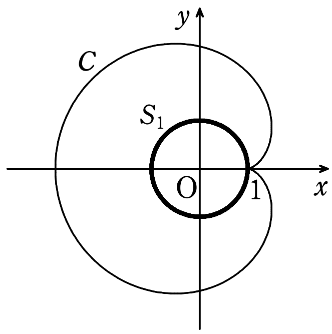
$$C:x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t\quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

がある。C 上の 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，Q$(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。動点 P は A を出発し，C 上を B に向かって Q まで速さ $\sqrt{3}$ で進み，Q から線分 QO 上を O まで速さ 1 で進む。

(1) 動点 P が A を出発し O に到達するまでの所要時間 $T(\theta)$ を求めよ。

(2) $T(\theta)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ [長崎大]



xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1 と，点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある。円 S_2 は円 S_1 に外接しながら，すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する。点 A の出発点は $(2,\ 0)$ であり，円 S_2 上の点で，このとき $(1,\ 0)$ に位置している点を P とする。点 A が $(2,\ 0)$ から出発し，$(2,\ 0)$ に戻ってくるとき，点 P の描く曲線を C とすると，図のようになる。また，動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を $(x(\theta),\ y(\theta))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ。

(3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ [芝浦工業大]

原点 O を中心とする半径 a の円に糸がまきつけられていて，糸の端は点 A $(a,\ 0)$ にあり，反時計回りにほどける．いま，糸をたわむことなくほどいていき，その糸と円の接点を R とし，$\angle \mathrm{AOR} = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とする．更に，ほどかれた糸の端の座標を P $(x,\ y)$ とする．

(1) x と y を θ の関数で表せ．

(2) 第 1 象限にある P の軌跡と円および直線 $y = a$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{10}$ [大阪大]

座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y = \sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする。

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2,\ x^2 + y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

章末問題B

$\boxed{11}$［大阪市立大］

$t>1$ とする。2 つの曲線 $y=\log x$，$y=\log(x+1)$，および 2 つの直線 $y=0$，$x=t$ で囲まれた部分 A について，次の問いに答えよ。

(1)　A の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　A を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $W(t)$ を求めよ。

(3)　(2) の $W(t)$ について，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dW}{dt}$ を求めよ。

$\boxed{12}$［東京大］

座標平面上で 2 つの不等式 $y\geqq\dfrac{1}{2}x^2$，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2\leqq\dfrac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。S を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸の周りに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

$\boxed{13}$［東京大］

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。

次の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい。

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3)　(2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

$\boxed{14}$［岡山大］

座標平面において線分 L：$y=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$，曲線 C：$y=x^2-x+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ および y 軸で囲まれた図形を D とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分 OQ の長さ u を t で表せ。ただし O は原点とする。

(2)　(1) の P，Q について線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3)　図形 D を直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{15}$ [東京理科大]

a は $0<a<2$ を満たす実数とする。座標平面において，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，直線 $y=2x$ に垂直な直線を ℓ とし，ℓ と直線 $y=2x$ の交点を Q とする。また，曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq a)$，直線 ℓ，および直線 $y=2x$ で囲まれた部分を D とする。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 原点 O と点 Q の距離を求めよ。

(3) 線分 PQ の長さを求めよ。

(4) D の面積を求めよ。

(5) D を直線 $y=2x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{16}$ [京都大]

極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ。

$\boxed{17}$ [神戸大]

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{18}$ [京都大]

(1) $x\geqq 0$ で定義された関数

$$f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

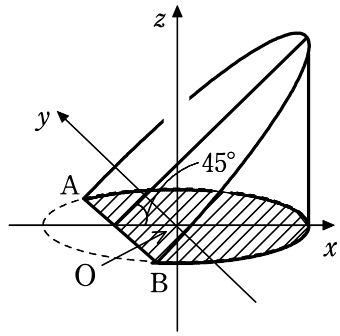
について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 極方程式 $r=\theta$ $(\theta\geqq 0)$ で定義される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ。

19［広島大］

座標空間内の平面 H：$z=0$ とその上の曲線

C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の2点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H，平面 T および曲面 K が囲む2つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（上図の斜線で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

20［大阪大］

xyz 空間内に2つの立体KとLがある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体Kの切り口は3点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体Lの切り口は3点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体KとLの共通部分の体積を求めよ．

章末問題C

$\boxed{1}$［東京大］

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

$\boxed{2}$［京都大］

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A，B で交わり，点 A における C_1 の接線 ℓ と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$［大阪大］

xy 平面の単位円上に点 $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t)$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ がある。点 Q は $\mathrm{PQ}=d$ を満たす x 軸の正の部分にある点とする。ただし，d は定数で $d>1$ とする。点 R を線分 PQ の中点とする。

(1)　R の座標を求めよ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲を動くときに R の描く曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$［大阪大］

2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線 $C: x=f(t)$，$y=g(t)$ $\left(0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。

(1)　t が $0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2)　t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3)　C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$［大阪大］

2つの関数を $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$，$g(t)=t^2-2\log t$ で定める。実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき，点 $(f(t),\ g(t))$ が xy 平面上に描く曲線を C とする。

(1)　$t>1$ のとき $g(t)>g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ であることを示せ。

(2)　s を1以上の実数とする。直線 $x=\dfrac{1}{2}\left(s+\dfrac{1}{s}\right)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　a を1より大きい実数とする。直線 $x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$［東京大］

座標平面において，媒介変数 t を用いて $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

$\boxed{7}$［名古屋市立大］

各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，関数 $f_n(x)$ が

$$f_1(x)=\log x,\quad f_{n+1}(x)=\int_1^x \frac{f_n(t)}{t}dt\ (x>0)$$

で与えられているとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f_n(x)=\dfrac{(\log x)^n}{n\,!}$ であることを証明せよ。

(2)　曲線 $y=f_n(x)$，直線 $x=e^a\ (0<a\leqq 1)$，および x 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする。S_n+S_{n+1} を a と n を用いて表せ。

(3)　(2)の結果を使い，次の無限級数の和を $a\ (0<a\leqq 1)$ を用いて表せ。

$$\frac{a}{1!}-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}-\frac{a^4}{4!}+\cdots\cdots$$

$\boxed{8}$［東京工業大］

(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ と正の数 a_n に対して

$$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\ \cdots\cdots\ +S_n)$ を求めよ。

9 [九州大]

n，N を正の整数とする。

(1)　k を正の定数とし，関数 $f(x)$ は $f(x)=f(x+k)$ を満たすとする。このとき，

$T_n=\int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x}f(x)dx$，$S_N=\sum_{n=1}^{N} T_n$ とおく。T_n と S_N を T_1 で表せ。

(2)　(1) において $f(x)\geqq 0$ とする。このとき，k 以上の実数 z に対して

$$S_N \leqq \int_0^z e^{-x}f(x)dx < S_{N+1}$$

が成立するような N を求めよ。更に，この不等式を用いて極限 $\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-x}f(x)dx$ が存在することを示し，この極限を T_1 で表せ。

(3)　$h(x)=e^{-x}|\cos\pi x|$ とする。$y=h(x)$，x 軸，y 軸および $x=z$ で囲まれた部分の面積を $V(z)$ とおく。$\lim_{z\to\infty}V(z)$ を求めよ。

10 [京都大]

自然数 n に対し，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n 2\theta \sin^3\theta\, d\theta$ とする.

(1)　I_2 の値を求めよ.

(2)　xy 平面上で原点 O から点 P(x, y) への距離を r，x 軸の正の方向と半直線 OP のなす (弧度法による) 角を θ とする．方程式 $r=\sin 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を，直線 $y=x$ の周りに回転して得られる曲面が囲む立体の体積を V とするとき，
$V=3\pi I_3+2\pi I_2$ と表されることを示せ.

11 [金沢大]

$0\leqq x\leqq\pi$ とし，$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$，$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ とおく。また，曲線 $y=f_n(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の長さをそれぞれ L_n，L とする。

(1)　L_n を L_1 で表せ。

(2)　$\sqrt{1+t}<1+\frac{1}{2}t$ $(t>0)$ を示し，$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4(L_n-L)}{L}\right\}^n$ を求めよ。

$\boxed{12}$［筑波大］

xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし，ℓ の周りに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1)　D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leqq t \leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2)　平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ を求めよ。

(3)　E の体積 V を求めよ。

$\boxed{13}$［大阪大］

xyz 空間に 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体が作る立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体が作る立体を V_B とおく。更に V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。

(1)　平面 $z=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

$\boxed{14}$［神戸大］

$0<a<b$ とする。座標空間内の 4 点 $(a,\ 0,\ 1)$，$(a,\ 0,\ -1)$，$(b,\ 0,\ 1)$，$(b,\ 0,\ -1)$ を頂点にもつ xz 平面上の長方形の周および内部を D とする。

(1)　D を y 軸の周りに 1 回転させてできる図形を E とし，さらに E を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体を V とする。V の体積を求めよ。

(2)　D を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体を F とし，さらに F を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体を W とする。W の体積を求めよ。

(3)　V と W の体積の大小を比較せよ。

$\boxed{15}$［東京工業大］

xyz 空間に 4 点 P$(0,\ 0,\ 2)$，A$(0,\ 2,\ 0)$，B$(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，C$(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

$\boxed{16}$［東京大］

座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 C(0，0，1) が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

$\boxed{17}$［大阪市立大］

O を原点とする座標空間内に点 A(0，0，1)，B(1，0，1)，C(1，1，1) が与えられている。線分 OC を 1 つの対角線とし，線分 AB を 1 辺とする立方体を直線 OC の周りに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい。

(1)　点 P(0，0，p) $(0<p \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ。

(2)　点 Q(q，0，1) $(0 \leqq q \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ。

(3)　原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 u $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする。点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数として表せ。

(4)　K の体積を求めよ。

$\boxed{18}$［東京大］

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A(−1，1，0)，B(1，1，0)，C(1，−1，0)，D(−1，−1，0) とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。