$\boxed{1}$

(解説)

(1)　白球4個，赤球3個が入っている袋から球を3個取り出す方法は　$_7C_3=35$ (通り)

確率変数 W のとり得る値は0，1，2，3である。

$$P(W=0)=\frac{_3C_3}{35}=\frac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イウ}}35}$$

$$P(W=1)=\frac{_4C_1\times{}_3C_2}{35}=\frac{4\times3}{35}=\frac{{}^{\text{エオ}}12}{35}$$

$$P(W=2)=\frac{_4C_2\times{}_3C_1}{35}=\frac{6\times3}{35}=\frac{{}^{\text{カキ}}18}{35}$$

$$P(W=3)=\frac{_4C_3}{35}=\frac{{}^{\text{ク}}4}{35}$$

ゆえに，W の期待値 (平均) $E(W)$ は

W	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(W)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}$$

$$=\frac{60}{35}=\frac{{}^{\text{ケコ}}12}{{}^{\text{サ}}7}$$

また　$E(W^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}$

$$=\frac{120}{35}=\frac{24}{7}$$

よって，W の分散 $V(W)$ は

$$V(W)=E(W^2)-\{E(W)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{{}^{\text{シス}}24}{{}^{\text{セソ}}49}$$

(2)　確率変数 Z が標準正規分布に従うから，t を実数の定数とすると

$$P(-t\leqq Z\leqq t)=2P(0\leqq Z\leqq t)$$

が成り立つ。

$P(-t\leqq Z\leqq t)=0.99$ が成り立つとき　$2P(0\leqq Z\leqq t)=0.99$

ゆえに　$P(0\leqq Z\leqq t)=0.495$

正規分布表から0.495に最も近い値で選択肢にある値を探すと　$t=2.58$　(${}^{\text{タ}}$③)

(3)　母標準偏差 σ の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度95 %の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　$L_1=\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

また，この標本から得られる母平均 m の信頼度99 %の信頼区間は，(2) より

$$\overline{X}-2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　$L_2=\overline{X}+2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

これらから　$\frac{L_2}{L_1}=\frac{2\cdot2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{2.58}{1.96}=1.31\cdots\cdots$

よって　$\frac{L_2}{L_1}={}^{\text{チ}}1.{}^{\text{ツ}}3$

また，同じ母集団から抽出した大きさ $4n$ の無作為標本の標本平均を $\overline{Y}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度95 %の信頼区間は

$$\overline{Y}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\leqq m\leqq\overline{Y}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

よって　$L_3=\overline{Y}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}-\left(\overline{Y}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\right)$

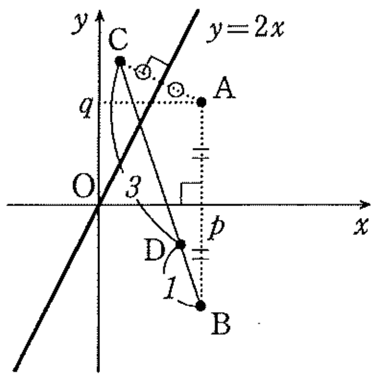
$$=2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ゆえに　$\frac{L_3}{L_1}=\frac{1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{2}={}^{\text{テ}}0.{}^{\text{ト}}5$

2

解説

(1)　点Bは点A$(p,\ q)$とx軸に関して対称であるから，
点Bの座標は　$(p,\ -q)$　（ア ①）



(2)　直線ACの傾きは　$\dfrac{s-q}{r-p}$

直線ACと直線$y=2x$が垂直であるから

$$\frac{s-q}{r-p}\cdot 2=-1$$

よって　$s-q=\dfrac{{}^{\text{イウ}}-1}{{}^{\text{エ}}2}(r-p)$　……②

また，線分ACの中点の座標は　$\left(\dfrac{p+r}{{}^{\text{オ}}2},\ \dfrac{q+s}{2}\right)$

この中点が直線$y=2x$上にあるから　$\dfrac{q+s}{2}=2\cdot\dfrac{p+r}{2}$

よって　$s+q=2(r+p)$　……③

③−②より　$2q=\dfrac{5}{2}r+\dfrac{3}{2}p$　　ゆえに　$r=\dfrac{{}^{\text{カキ}}-3}{{}^{\text{ク}}5}p+\dfrac{{}^{\text{ケ}}4}{5}q$

②×4+③より　$5s-3q=4p$　　よって　$s=\dfrac{{}^{\text{コ}}4}{{}^{\text{サ}}5}p+\dfrac{{}^{\text{シ}}3}{5}q$

(3)　点Dは線分BCを$1:3$に内分する点であるから，点Dの座標は，(1)，(2)より

$$\left(\frac{3\cdot p+1\cdot r}{1+3},\ \frac{3\cdot(-q)+1\cdot s}{1+3}\right)\qquad よって\qquad \left(\frac{3}{4}p+\frac{r}{4},\ -\frac{3}{4}q+\frac{s}{4}\right)$$

(2)より　$\left(\dfrac{3}{4}p+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{5}p+\dfrac{4}{5}q\right),\ -\dfrac{3}{4}q+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{5}p+\dfrac{3}{5}q\right)\right)$

よって　$\left(\dfrac{{}^{\text{ス}}3}{{}^{\text{セ}}5}p+\dfrac{{}^{\text{ソ}}1}{5}q,\ \dfrac{{}^{\text{タ}}1}{{}^{\text{チ}}5}p-\dfrac{{}^{\text{ツ}}3}{5}q\right)$

これより　$\mathrm{OD}^2=\left(\dfrac{3}{5}p+\dfrac{q}{5}\right)^2+\left(\dfrac{p}{5}-\dfrac{3}{5}q\right)^2$

$$=\frac{9}{25}p^2+\frac{6}{25}pq+\frac{q^2}{25}+\frac{p^2}{25}-\frac{6}{25}pq+\frac{9}{25}q^2$$

$$=\frac{10}{25}p^2+\frac{10}{25}q^2=\frac{2}{5}(p^2+q^2)$$

$\mathrm{OA}^2=p^2+q^2$であるから　$\mathrm{OD}^2=\dfrac{{}^{\text{テ}}2}{{}^{\text{ト}}5}\mathrm{OA}^2$　……①

(4)　点AがOを中心とする半径2の円の周上にあるとき　$\mathrm{OA}=2$

①に代入すると　$\mathrm{OD}^2=\dfrac{2}{5}\cdot 2^2=\dfrac{8}{5}$

$\mathrm{OD}>0$であるから　$\mathrm{OD}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

すなわち，このとき点DはOを中心とする半径$\dfrac{{}^{\text{ナ}}2\sqrt{{}^{\text{ニヌ}}10}}{{}^{\text{ネ}}5}$の円の周上にある。

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c$

よって，円を表すための条件は　$\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c>0$　すなわち　$a^2+b^2>12c$

(2) (1)と $c=1$ から　$a^2+b^2>12$

$a^2+b^2\leqq 12$ とすると

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

よって，求める場合の数は　$6^2-6=30$(通り)

(3) ＊は1から6までの任意の整数とする．

$a^2+b^2>12c$ であるから　$c=1$ のとき30通り．

$c=2$ のとき　$a^2+b^2>24$

ゆえに　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 3),$
$(4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ *),\ (6,\ *)$　の23通り．

$c=3$ のとき　$a^2+b^2>36$

ゆえに　$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 6),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),$
$(6,\ *)$　の14通り．

$c=4$ のとき　$a^2+b^2>48$

ゆえに　$(a,\ b)=(4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$　の6通り．

$c=5$ のとき　$a^2+b^2>60$

ゆえに　$(a,\ b)=(5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$　の3通り．

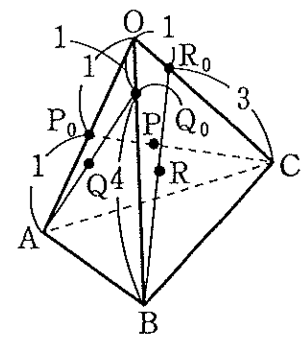
$c=6$ のとき　$a^2+b^2>72$

このような場合はない．

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{6^3}(30+23+14+6+3)=\dfrac{19}{54}$

$\boxed{4}$

(解説)



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\overrightarrow{\mathrm{OR_0}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{u}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-t+\frac{s}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-u+\frac{t}{5}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-s+\frac{u}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}$$

(2) 条件から　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

これらと(1)から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2-2t+s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(2-2u+\frac{2}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(2-2s+\frac{u}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は同一平面上にないから

$2-2t+s=1$，$2-2u+\dfrac{2}{5}t=1$，$2-2s+\dfrac{u}{2}=1$

これを解くと　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{5}{6}$，$u=\dfrac{2}{3}$