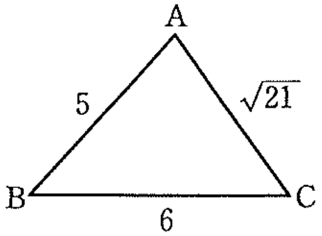
$\boxed{1}$

(解説)

(1)　△ABCにおいて，余弦定理により

$$\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{5^2+6^2-(\sqrt{21})^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{^{\text{ア}}2}{^{\text{イ}}3}$$

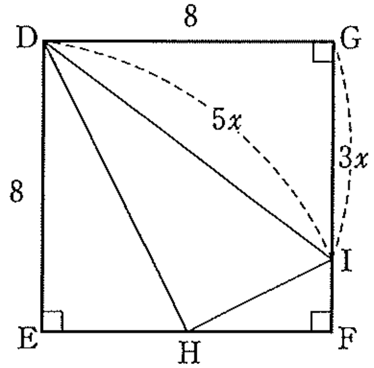


$\sin\angle \mathrm{ABC}>0$ であるから

$$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{^{\text{ウ}}5}}{^{\text{エ}}3}$$

よって　$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}={}^{\text{オ}}5\sqrt{^{\text{カ}}5}$

(2)　(i)　$\cos\angle \mathrm{DIG}=\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{DI}}$ であるから　$\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{DI}}=\frac{3}{5}$



よって，$\mathrm{IG}=3x$，$\mathrm{DI}=5x\ (x>0)$ とおける。

△DIGにおいて，三平方の定理により

$$(5x)^2=(3x)^2+8^2$$

すなわち　$16x^2=64$

ゆえに　$x^2=4$

$x>0$ であるから　$x=2$

したがって　$\mathrm{IG}=3\cdot2=6$，

$\mathrm{DI}=5\cdot2=10$　（$^{\text{キ}}$③）

また，$\tan\angle \mathrm{FIH}=\frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{FI}}$ であるから　$\frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{FI}}=2$

よって　$\mathrm{HF}=2\mathrm{FI}=2(\mathrm{GF}-\mathrm{GI})=2(8-6)=4$

したがって　$\mathrm{HI}=\sqrt{\mathrm{HF}^2+\mathrm{FI}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$　（$^{\text{ク}}$①）

(ii)　(i)より　$\mathrm{HF}:\mathrm{FI}=2:1$

また　$\mathrm{EH}=\mathrm{EF}-\mathrm{HF}=8-4=4$

$$\mathrm{DH}=\sqrt{\mathrm{DE}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

よって，DE：EH＝DH：HI＝HF：FIであるから，△HFIと相似な三角形は

△DEHと△DHI　（$^{\text{ケ}}$①）

また，$\cos\angle \mathrm{DIH}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ であるから　$\cos\angle \mathrm{DIH}<\cos\angle \mathrm{DIG}\left(=\frac{3}{5}\right)$

したがって　$\angle \mathrm{DIG}<\angle \mathrm{DIH}$　（$^{\text{コ}}$③）

(iii)　△DHIは直角三角形であるから，DIが外接円の直径である。

よって，外接円の半径は　$\mathrm{DI}\div2=10\div2={}^{\text{サ}}5$

また　$\triangle \mathrm{DHI}=\frac{1}{2}\mathrm{DH}\cdot\mathrm{HI}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=20$

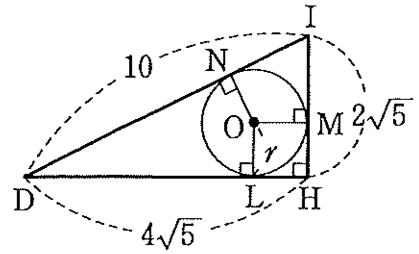
内接円の半径を r とすると　$\triangle \mathrm{DHI}=\frac{1}{2}r(10+4\sqrt{5}+2\sqrt{5})$

よって　$\frac{1}{2}r(10+4\sqrt{5}+2\sqrt{5})=20$

これを解くと　$r=\frac{20}{3\sqrt{5}+5}=\frac{20(3\sqrt{5}-5)}{(3\sqrt{5}+5)(3\sqrt{5}-5)}={}^{\text{シ}}3\sqrt{^{\text{ス}}5}-{}^{\text{セ}}5$

別解　(内接円の半径)

右の図のように，内接円の中心をO，内接円と辺DH，HI，DIの接点をそれぞれL，M，Nとすると，四角形OLHMは正方形であるから



$\mathrm{HL}=\mathrm{HM}=r$

よって　$\mathrm{DL}=\mathrm{DN}=4\sqrt{5}-r$

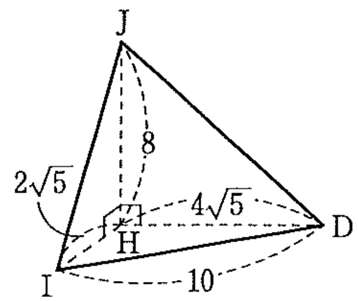
$\mathrm{IM}=\mathrm{IN}=2\sqrt{5}-r$

DI＝DN＋INであるから　$10=(4\sqrt{5}-r)+(2\sqrt{5}-r)$

すなわち　$r={}^{\text{シ}}3\sqrt{^{\text{ス}}5}-{}^{\text{セ}}5$

(3)　$\mathrm{DJ}=\sqrt{\mathrm{DH}^2+\mathrm{HJ}^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2+8^2}=12$

$\mathrm{IJ}=\sqrt{\mathrm{HI}^2+\mathrm{HJ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+8^2}=2\sqrt{21}$



DI＝10であるから

DI：DJ：IJ＝AB：BC：CA

よって，△IDJ∽△ABCであり，相似比は2：1であるから　$\triangle \mathrm{IDJ}=2^2\cdot\triangle \mathrm{ABC}=4\cdot5\sqrt{5}={}^{\text{ソタ}}20\sqrt{^{\text{チ}}5}$

四面体JDHIの体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{DHI}\cdot\mathrm{HJ}=\frac{1}{3}\cdot20\cdot8=\frac{160}{3}$$

また　$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{IDJ}\cdot\mathrm{HK}=\frac{20\sqrt{5}}{3}\mathrm{HK}$

よって　$\frac{20\sqrt{5}}{3}\mathrm{HK}=\frac{160}{3}$　　すなわち　$\mathrm{HK}=\frac{^{\text{ツ}}8\sqrt{^{\text{テ}}5}}{^{\text{ト}}5}$

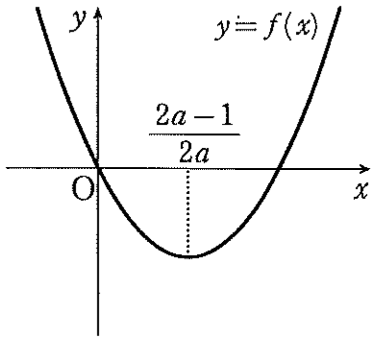
$\boxed{2}$

(解説)

$f(x)=ax^2+(1-2a)x=a\left(x-\dfrac{2a-1}{2a}\right)^2-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}$

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は　$x=\dfrac{2a-1}{2a}$

また，このグラフは原点を通る。軸が y 軸より右側にあるとき，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，条件(B)を満たさない。



よって，$\dfrac{2a-1}{2a}\leqq 0$ であることが必要で，このとき

$f(x)$ は条件(B)を満たす。

[1]　$\dfrac{2a-1}{2a}<-3$ すなわち $0<a<\dfrac{1}{8}$ のとき

(A)が成り立つための条件は

$f(-3)\geqq -1$　すなわち　$9a-3(1-2a)\geqq -1$

よって　　$a\geqq\dfrac{2}{15}$

これは $0<a<\dfrac{1}{8}$ を満たさない。

[2]　$-3\leqq\dfrac{2a-1}{2a}<0$ すなわち $\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき

(A)が成り立つための条件は

$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)\geqq -1$　すなわち　$-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}\geqq -1$

分母を払って整理すると　　$4a^2-8a+1\leqq 0$

よって　　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ との共通範囲は　　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$

[3]　$\dfrac{2a-1}{2a}=0$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ となり，条件(A)を満たす。

以上から，求める a の値の範囲は　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　6人を2人ずつA，B，Cの3組に分ける方法は　${}_6C_2\times{}_4C_2$ 通り

ここで，A，B，Cの区別をなくすと，3!通りずつ同じ分け方ができる。

よって，組の作り方の総数は　$\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=15$ (通り)

(2)　14人を2人ずつ A_1，A_2，……，A_n の n 組に分ける方法は

$${}_{14}C_2\times{}_{12}C_2\times\cdots\cdots\times{}_{14-2(n-1)}C_2 \text{ 通り}$$

ここで，A_1，A_2，……，A_n の区別をなくすと，$n!$ 通りずつ同じ分け方ができる。

よって　　$S_n=\dfrac{{}_{14}C_2\times{}_{12}C_2\times\cdots\cdots\times{}_{14-2(n-1)}C_2}{n!}=\dfrac{14!}{(14-2n)!\cdot n!\cdot 2^n}$

(3)　$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{14!}{(12-2n)!\cdot(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\times\dfrac{(14-2n)!\cdot n!\cdot 2^n}{14!}=\dfrac{(14-2n)(13-2n)}{2(n+1)}$

$=\dfrac{(7-n)(13-2n)}{n+1}$

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}>1$ であるから　$\dfrac{(7-n)(13-2n)}{n+1}>1$

分母を払うと　$91-27n+2n^2>n+1$

よって　　$n^2-14n+45>0$

すなわち　$(n-5)(n-9)>0$

ゆえに　　$n<5$，$9<n$

n は6以下の自然数であるから　$n=1$，2，3，4

(4)　(3)より，$1\leqq n\leqq 4$ のとき　$S_n<S_{n+1}$

$n=5$ のとき　$S_n=S_{n+1}$，　$n=6$ のとき　$S_n>S_{n+1}$

よって　$S_1<S_2<S_3<S_4<S_5=S_6>S_7$

したがって，S_n を最大にする n の値は　$n=5$，6