$\boxed{1}$

(解説)

(1)　関数 $f(x)$ は，$x=1$ で極値をとるから　　$f'(1)={}^{\text{ア}}0$

$f'(x)=3px^2+q$ であるから，$f'(1)=0$ となるとき　　$3p+q=0$

ゆえに　　$q={}^{\text{イウ}}-3p$

このとき　　$f(x)=px^3-3px$，$f'(x)=3px^2-3p$

点 $(s,\ f(s))$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y-(ps^3-3ps)=(3ps^2-3p)(x-s)$$

すなわち　　$y=({}^{\text{エ}}3ps^2-{}^{\text{オ}}3p)x-{}^{\text{カ}}2ps^3$

曲線 C の接線の傾きについて，$3ps^2-3p=3p(s^2-1)$ であり，$p>0$ であるから，

$s={}^{\text{キ}}0$ のとき最小値 ${}^{\text{クケ}}-3p$ をとる。

(2)　曲線 C と直線 $y=-x$ の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

$$px^3-3px=-x$$

すなわち　　$x\{px^2-(3p-1)\}=0$　……②

よって，曲線 C と直線 $y=-x$ の共有点の個数は，$p>0$ に注意して

[1]　$3p-1\leqq 0$ すなわち $-3p\geqq {}^{\text{コサ}}-1$ のとき

$px^2-(3p-1)\geqq 0$ で，等号は $3p-1=0$ かつ $x=0$ のときのみ成立する。

すなわち，方程式②の実数解は $x=0$ のみであるから　　${}^{\text{シ}}1$ 個

[2]　$3p-1>0$ すなわち $-3p<-1$ のとき

方程式②の実数解は $x=0$，$x=\pm\sqrt{\dfrac{3p-1}{p}}\ (\fallingdotseq 0)$ であるから　　${}^{\text{ス}}3$ 個

また，曲線 C と直線 ℓ の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

$$px^3-3px=-x+r$$

すなわち　　$x\{px^2-(3p-1)\}=r$　……③

$p\fallingdotseq 0$ であるから，この方程式は少なくとも1個の実数解をもつ。

よって，r の値によらず，方程式③の実数解の個数が一定とすると，それは個数が ${}^{\text{セ}}1$ 個となるときであり，次の[1]または[2]を満たす。

[1]　方程式 $px^2-(3p-1)=0$ が $x=0$ を解にもつ

[2]　方程式 $px^2-(3p-1)=0$ が実数解をもたない

[1]のとき

$p\cdot 0^2-(3p-1)=0$ より　　$p=\dfrac{1}{3}$

[2]のとき

$p>0$ であるから　　$-(3p-1)>0$

よって　　$0<p<\dfrac{1}{3}$

[1]，[2] から　　$0<p\leqq\dfrac{{}^{\text{ソ}}1}{{}^{\text{タ}}3}$

(3)　点 $(s,\ f(s))$ における曲線 C の接線の傾きが -1 となるとき　　$3ps^2-3p=-1$

ゆえに　　$s^2=\dfrac{3p-1}{3p}$

$p>\dfrac{1}{3}$ であるから　　$s=\pm\sqrt{\dfrac{{}^{\text{チ}}3p-{}^{\text{ツ}}1}{{}^{\text{テ}}3p}}$

また，曲線 C と点 $(s,\ f(s))$ における曲線 C の接線の共有点の x 座標は，次の方程式の実数解である。

$$px^3-3px=(3ps^2-3p)x-2ps^3$$

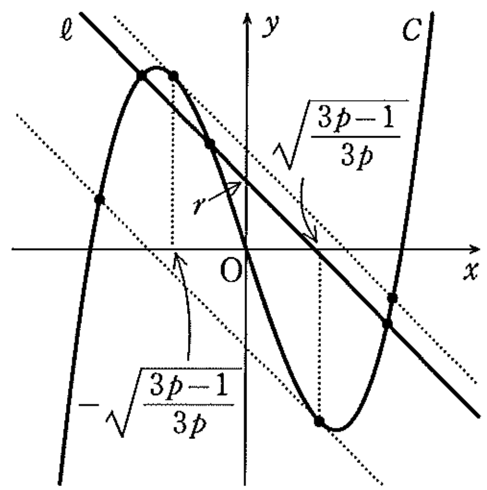
よって　　$p(x-s)^2(x+2s)=0$

$p>0$ であるから　　$x=s,\ -2s$

よって，曲線 C と点 $(s,\ f(s))$ における曲線 C の接線の共有点は2個である。

ゆえに，直線 ℓ が点 $(s,\ f(s))$ における曲線 C の接線に一致するとき，曲線 C と直線 ℓ の共有点の個数は ${}^{\text{ト}}2$ 個となる。

また，曲線 C と，曲線 C との共有点が3個になるような傾きが -1 の直線 ℓ を図示すると，右の図の実線のようになる。



点 $\left(\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}},\ f\left(\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}\right)\right)$ における曲線 C の接線の y 切片は

$$-2p\left(\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}\right)^3=-\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

点 $\left(-\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}},\ f\left(-\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}\right)\right)$ における曲線 C の接線の y 切片は

$$-2p\left(-\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}\right)^3=\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

よって，曲線 C と直線 ℓ が3個の共有点をもつような r の値の範囲は

$$-\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}<r<\frac{6p-2}{3}\sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

したがって，求める r の絶対値の範囲は　　$|r|<\dfrac{{}^{\text{ナ}}6p-{}^{\text{ニ}}2}{{}^{\text{ヌ}}3}\sqrt{\dfrac{3p-1}{3p}}$

(4)　曲線 $y=x^2-1$ と x 軸および2直線 $x=u$，$x=t$ で囲まれた図形の面積は，

$1\leqq u\leqq x<t$ では $x^2-1\geqq 0$ であるから

$$\int_u^t (x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_u^t=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)-\left(\frac{u^3}{3}-u\right)=\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{3}u^3+u$$

これが $f(t)$ と等しくなるとき　$\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{3}u^3+u=pt^3-3pt$

これが t についての恒等式となるための条件は　$\frac{1}{3}=p$，$-1=-3p$，$-\frac{1}{3}u^3+u=0$

これを解くと　$p=\frac{{}^{\text{ネ}}1}{{}^{\text{ノ}}3}$ ($p>0$ を満たす)　かつ　$u=0$，$\pm\sqrt{3}$

u は 1 以上の実数であるから　$u=\sqrt{{}^{\text{ハ}}3}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=\sqrt{2}:1$ から　$\sqrt{2}\,\mathrm{AP}=\mathrm{OP}$　よって　$2\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2$

ゆえに　$2\{(x-a)^2+y^2\}=x^2+y^2$

したがって，C の方程式は　$x^2+y^2-4ax+2a^2=0$

(2) C の方程式を変形すると　$(x-2a)^2+y^2=(\sqrt{2}\,a)^2$　$(a>0)$

よって，C は中心が $(2a,\ 0)$，半径が $\sqrt{2}\,a$ の円である。

また，$y=-x+2k$ から　$x+y-2k=0$

円 C が直線 $y=-x+2k$ と共有点をもたないのは，円の中心と直線との距離が円の半径より大きいときであるから　$\frac{|2a+0-2k|}{\sqrt{1^2+1^2}}>\sqrt{2}\,a$

分母を払って　$|2k-2a|>2a$　よって　$|k-a|>a$

ゆえに　$k-a<-a$ または $k-a>a$

したがって　$k<0$ または $k>2a$

(3) 求める距離の最小値は

(C の中心と直線との距離)$-$(C の半径)

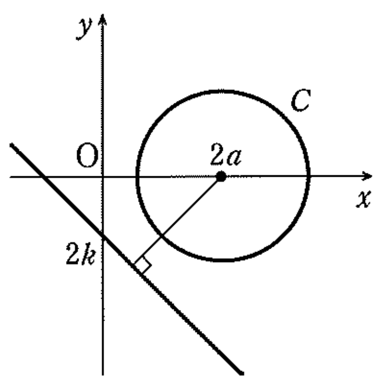
$=\frac{|2a-2k|}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,a$

$=\sqrt{2}(|k-a|-a)$

よって，$k<0$ のとき

$\sqrt{2}\{-(k-a)-a\}=-\sqrt{2}\,k$

$k>2a$ のとき　$\sqrt{2}\{(k-a)-a\}=\sqrt{2}(k-2a)$



$\boxed{3}$

(解説)

(1) 1 回投げたとき，出た目の数が 1 になる確率は　$\frac{1}{6}$

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

(2) 出た目の数が n 回とも 1 または 2 である確率は　$\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

出た目の数が n 回とも 1 である確率は　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

出た目の数が n 回とも 2 である確率も　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$

(3) 出る目の 3 種類の数の選び方は　${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ (通り)

この 3 種類の目を a，b，c とする。n 回投げたとき，

出た目の数が a または b または c である確率は　$\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

出た目の数が a と b の 2 種類である確率は，(2) から　$\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$

出た目の数が b と c の 2 種類，c と a の 2 種類である確率も，それぞれ

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

出た目の数が a のみ，b のみ，c のみである確率は，それぞれ　$\left(\frac{1}{6}\right)^n$

したがって，求める確率は

$$20\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]=20\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$