$\boxed{1}$

座標空間において4点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$，D$(x,\ y,\ z)$ を考える。

(1)　三つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boxed{\text{ア}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\boxed{\text{イ}}\quad\cdots\cdots②$$

である。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$　　① $y-z-1$　　② $z-x-1$

③ $x-y$　　④ $y-z$　　⑤ $z-x$

⑥ $x-y+1$　　⑦ $y-z+1$　　⑧ $z-x+1$

(2)　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ により，三角形 ABC は正三角形である。以下，4点 A，B，C，D が，正四面体の四つの頂点になるとする。このときの x，y，z の値を求めよう。ただし，$x>1$ とする。

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ の大きさは，いずれも $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，どの二つのベクトルのなす角も $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\boxed{\text{キ}}$ となる。

このことと①，②および $|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ により，

$(x,\ y,\ z)=\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ となる。

(3)　$(x,\ y,\ z)=\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$ のときを考える。線分 AB の中点を P，線分 DA を $1:2$ に内分する点を Q，線分 DC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を R とする。三角形 PQR の面積 S が最小になるときの t の値を求めよう。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\boxed{\text{ソ}}\,t^2-\boxed{\text{タ}}\,t+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角を θ とすると，$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned}4S^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\sin^2\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\cos^2\theta\\&=t^2-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}t+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\end{aligned}$$

である。

よって，S は $t=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ のとき最小になる。

$\boxed{2}$

xy 平面における曲線 C：$y=x^2$ と直線 ℓ：$y=ax$ (a は正の定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　ℓ と平行な，C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3)　ℓ と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を一辺とする四角形 OPQR が長方形になるように，m 上に 2 点 Q，R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　漸化式 $x_{n+1}-a=-2x_n+2a$ (a は定数) で定まる数列 x_1，x_2，x_3，…… の一般項 x_n を x_1，a を用いて表せ。

(2)　xy 平面において曲線 C：$y=f(x)=x^3-3ax^2$ (a は定数) を考える。C 上に点 P_1 $(t_1,\ f(t_1))$ をとる。ただし，$t_1 \neq a$ とする。P_1 における C の接線と C の交点のうち，P_1 と異なるものを P_2 $(t_2,\ f(t_2))$ とする。t_2 を t_1，a を用いて表せ。

(3)　さらに，P_2 における C の接線と C の交点のうち，P_2 と異なるものを P_3 とする。以下同様に P_4，P_5，P_6，…… を定める。P_1，P_2，P_3，…… はすべて相異なることを示せ。