高 3 物理総合 S･SA～後期第 3 回～＜解答＞◆円運動･万有引力◆

＜予習問題＞

【１】問１　③　　問２　①　　問３　③　　問４　④　　問５　③　　問６　⑤

＜演習問題＞

【１】（イ）$\sqrt{v_0^2-2gr(1-\cos\theta)}$　（ロ）$\cos\theta$　（ハ）$\dfrac{v_1^2}{r}$　（ニ）$\sqrt{v_0^2-4gr}$

（ホ）$\sqrt{2gr}$　（ヘ）$\sqrt{gr}$　（ト）$\sqrt{3gr}$　（チ）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（リ）$\dfrac{\sqrt{3}v_3}{g}$　（ヌ）$\dfrac{1}{2}v_3t$

＜解説＞

（イ）力学的エネルギー保存則より$\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{1}{2}mv_1^2+mgr(1-\cos\theta)$

$\therefore v_1=\sqrt{v_0^2-2gr(1-\cos\theta)}$

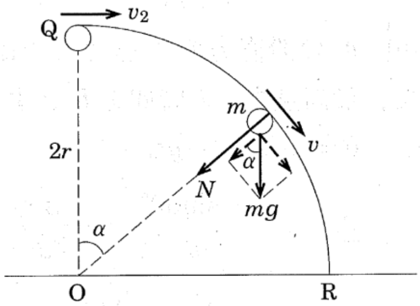
（ロ）・（ハ）垂直抗力の大きさを N として，小球の運動方程式は $m\dfrac{v_1^2}{r}=N-mg\cos\theta$

$\therefore N=m\left(g\cos\theta+\dfrac{v_1^2}{r}\right)$

（ニ）力学的エネルギー保存則より

$\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{1}{2}mv_2^2+mg\cdot 2r$　　$\therefore v_2=\sqrt{v_0^2-4gr}$

（ホ）小球が右図のように円筒内面 QR 上の任意の点をすべっているときの速さを v ，中心角をα として，力学的エネルギー保存則と運動方程式を立てると，



$$\frac{1}{2}mv_2^2+mg\,2r=\frac{1}{2}mv^2+mg\,2r\cos\alpha\quad,\quad m\frac{v^2}{2r}=N+mg\cos\alpha$$

両式から $N=\dfrac{mv^2}{2r}-mg\cos\alpha=\dfrac{mv_2^2}{2r}+2mg(1-\cos\alpha)-mg\cos\alpha=\dfrac{mv_2^2}{2r}+mg(2-3\cos\alpha)$

小球が面から離れないための条件は $N\geqq 0$ なので

$$\frac{mv_2^2}{2r}+mg(2-3\cos\alpha)\geqq 0\qquad\therefore v_2\geqq\sqrt{2gr(3\cos\alpha-2)}\quad\cdots①$$

ここで，最高点 Q において①の不等式が成立すれば，小球は円筒内面の QR のどの点でも離れないので，$\alpha=0$ つまり $\cos\alpha=1$ のとき最大になるから $v_2\geqq\sqrt{2gr}$

（ヘ）点 S において，$\alpha=60^\circ$ だから運動方程式は $m\dfrac{v_3^2}{2r}=N+mg\cos 60^\circ$

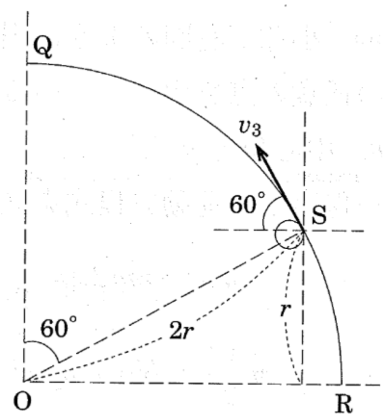
ここで，$N=0$，$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ を代入して $v_3=\sqrt{gr}$

（ト）点 R ではねかえった直後の小球の速さを v_R として，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_R{}^2 = \frac{1}{2}mv_3{}^2 + mgr \qquad v_3 \text{ の値を代入して } v_R = \sqrt{3gr}$$

（チ）点 R へ落下するときの速さは v_0 と等しいので，

はねかえり係数 e は $e = \dfrac{v_R}{v_0} = \dfrac{\sqrt{3gr}}{3\sqrt{gr}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



（リ）v_3 の鉛直方向の速度成分は $v_3\sin 60^\circ$ なので，
最高点までの時間を t_0 とすると

$$0 = -gt_0 + v_3\sin 60^\circ \qquad \therefore t_0 = \frac{v_3\sin 60^\circ}{g} = \frac{\sqrt{3}v_3}{2g}$$

よって $t = 2t_0 = \dfrac{\sqrt{3}v_3}{g}$

（ヌ）ST 間の距離を x とすると $x = v_3\cos 60^\circ \cdot t = \dfrac{1}{2}v_3 t$

【２】

問１　地球の自転を無視するので，地表での重力 mg は万有引力に等しいから

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad \therefore g = \frac{GM}{R^2}$$

問２　力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 - G\frac{Mm}{2R} \qquad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}\ \text{[m/s]}$$

問３　円運動の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{2R} = G\frac{Mm}{(2R)^2} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}\ \text{[m/s]}$$

問４（１）面積速度が一定であるから

$$\frac{1}{2}\times 2Rv = \frac{1}{2}\times 6RV \qquad \therefore V = \frac{1}{3}v\ \text{[m/s]}$$

（２）力学的エネルギー保存則より　$\dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{2R} = \dfrac{1}{2}mV^2 - G\dfrac{Mm}{6R}$

この式と（１）の結果より，V を消去して $v = \sqrt{\dfrac{3GM}{4R}} = \dfrac{\sqrt{3gR}}{2}$ [m/s]

問５　OB 上で，O から距離 r の位置での速さを v' とすると

$$\frac{1}{2}\times 2Rv = \frac{1}{2}\times rv' \quad , \quad \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{2R} = \frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{Mm}{r}$$

両式より v' を消去して $v = \sqrt{\dfrac{GMr}{(r+2R)R}} = \sqrt{\dfrac{GM}{\left(1+\dfrac{2R}{r}\right)R}} = \sqrt{\dfrac{gR}{1+\dfrac{2R}{r}}}$

ここで，$R < r < \infty$ であるから，$\sqrt{\dfrac{gR}{3}} < v < \sqrt{gR}$