$\boxed{1}$

(解説)

(1) $\angle A_2A_1A_3=\arg\left(\dfrac{\alpha^{\text{ア}3}-\alpha}{\alpha^{\text{イ}2}-\alpha}\right)=\arg\left\{\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}\right\}=\arg(\alpha+{}^{\text{ウ}}1)$

$\triangle A_1A_2A_3$ は正三角形であるから　$\angle A_2A_1A_3=\arg(\alpha+1)=60^\circ,\ 300^\circ$

α の虚部が正であるから，$\alpha+1$ の虚部も正．よって　$\arg(\alpha+1)={}^{\text{エオ}}60^\circ$

また，$A_1A_2=A_1A_3$ であるから　$|\alpha^2-\alpha|=|\alpha^3-\alpha|$

$$|\alpha(\alpha-1)|=|\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)|$$

よって　$|\alpha+1|={}^{\text{カ}}1$

ゆえに　$\alpha+1=1\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって　$\alpha=\dfrac{{}^{\text{キク}}-1}{{}^{\text{ケ}}2}+\dfrac{\sqrt{{}^{\text{コ}}3}}{2}i$

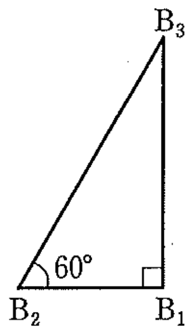
(2) (1)と同様に　$\angle B_2B_1B_3=\arg(\beta+1)$

条件から　$\arg(\beta+1)=90^\circ,\ 270^\circ$

よって　$\beta+1=ki$ (k は実数)　……① とおける．

$\beta=-1+ki$ であるから，β の実部は ${}^{\text{サシ}}-1$ である．

さらに，$\angle B_3B_2B_1=60^\circ$ のとき，$\triangle B_1B_2B_3$ は右図のような直角三角形になるから　$B_1B_2：B_1B_3=1：\sqrt{3}$



よって　$\sqrt{3}|\beta^2-\beta|=|\beta^3-\beta|$

ゆえに　$|\beta+1|=\sqrt{3}$

また，①から　$|\beta+1|=|k|$

β の虚部 k は正であるから　$k=\sqrt{{}^{\text{ス}}3}$

よって　$\beta=-1+\sqrt{3}i=2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$

ゆえに　$\arg\beta={}^{\text{セソタ}}120^\circ$

ド・モアブルの定理から　$\beta^2=2^2\{\cos(2\times120^\circ)+i\sin(2\times120^\circ)\}$

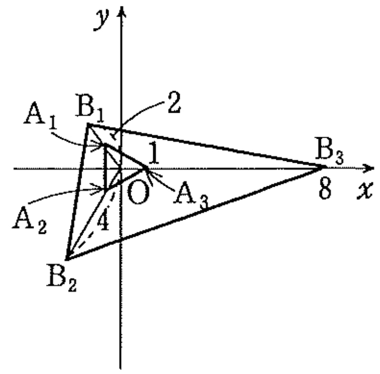
$$=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)={}^{\text{チツ}}-2-{}^{\text{テ}}2\sqrt{{}^{\text{ト}}3}\,i$$

$$\beta^3=2^3\{\cos(3\times120^\circ)+i\sin(3\times120^\circ)\}={}^{\text{ナ}}8$$

(3) $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$

$\alpha^2=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$，$\alpha^3=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ$

これと(2)から，$\triangle A_1A_2A_3$ と $\triangle B_1B_2B_3$ は右図のようになる．



$\triangle A_1A_2A_3=\triangle OA_1A_2+\triangle OA_2A_3+\triangle OA_3A_1$
$\qquad=3\triangle OA_1A_2$

$\triangle B_1B_2B_3=\triangle OB_1B_2+\triangle OB_2B_3+\triangle OB_3B_1$
$\qquad=|\beta||\beta^2|\triangle OA_1A_2+|\beta^2||\beta^3|\triangle OA_2A_3$
$\qquad+|\beta^3||\beta|\triangle OA_3A_1$

(2)から　$\triangle B_1B_2B_3=56\triangle OA_1A_2$

よって　$\dfrac{\triangle B_1B_2B_3}{\triangle A_1A_2A_3}=\dfrac{{}^{\text{ニヌ}}56}{{}^{\text{ネ}}3}$

$\boxed{2}$

(解説)

$\mathrm{P}(t,\ t^3)$ とすると，点Pにおける接線 l の傾きは　$3t^2$

$\tan\theta=3t^2$ とおく．

$3t^2=1$ のとき，直線 L は y 軸に平行となり，題意を満たさない．

$3t^2\neq 1$ のとき，直線 L の傾きは

$$\tan(\theta+45^\circ)=\frac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{1+3t^2}{1-3t^2}$$

よって，直線 L の方程式は　$y=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)+t^3$

ゆえに，$x^3=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ ……① が，異なる3つの実数解をもつ条件を求めればよい．

① から　$(x-t)\left(x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}\right)=0$

よって，$x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}=0$ が t 以外の異なる2つの実数解をもつ条件を求めればよい．

$f(x)=x^2+tx+t^2-\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}$ とおく．

求める条件は $f(t)\neq 0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 D について　$D>0$

$$f(t)=3t^2-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}=-\frac{1+9t^4}{1-3t^2}$$

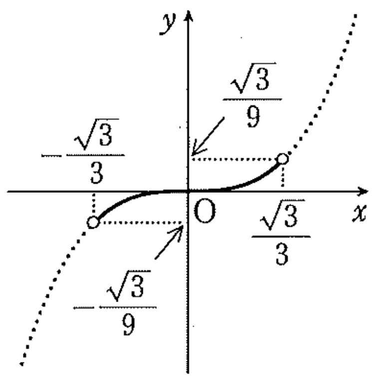
よって，$f(t)\neq 0$ は常に成り立つ．

$$D=t^2-4\left(t^2-\frac{1+3t^2}{1-3t^2}\right)=\frac{9t^4+9t^2+4}{1-3t^2}$$

よって，$D>0$ である条件は　$1-3t^2>0$

ゆえに　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，Pの範囲は図のようになる．



別解　$\mathrm{P}(t,\ t^3)$ とすると，点Pにおける接線の傾きは $3t^2$

曲線 C と直線 L が相異なる3点で交わる条件は，L の傾きが正となることである．

すなわち　$(-1<)\,3t^2<1$ から　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

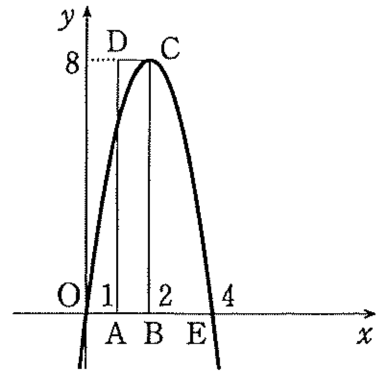
よって，Pの範囲は図のようになる．

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$8x-2x^2=-2(x-2)^2+8$

よって，曲線 $y=8x-2x^2$ と長方形ABCDの概形を図示すると右のようになる．



[1]　$0<t\leqq 1$ のとき

共通部分は，右図の斜線部分．

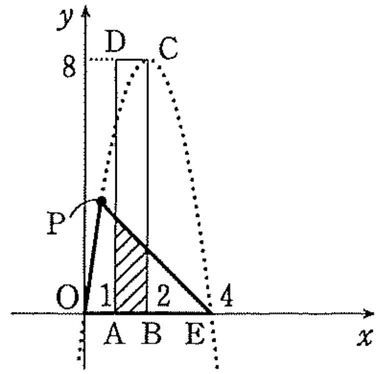
直線EPの方程式は　$y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)$

すなわち　$y=-2tx+8t$ ……①

①で　$x=1$ のとき　$y=6t$

　　$x=2$ のとき　$y=4t$

よって　$f(t)=\dfrac{1}{2}(6t+4t)\cdot 1=5t$



[2]　$1<t\leqq 2$ のとき

共通部分は，右図の斜線部分．

直線OPの方程式は　$y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x$

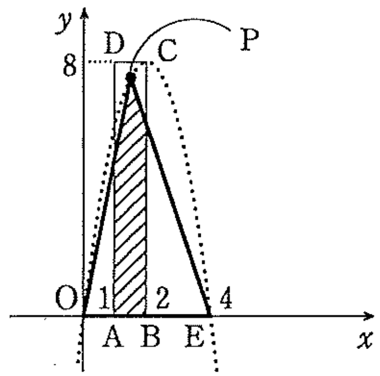
すなわち　$y=(-2t+8)x$ ……②

②で　$x=1$ のとき　$y=-2t+8$

　　$x=t$ のとき　$y=-2t^2+8t$

①で　$x=2$ のとき　$y=4t$

よって



$$f(t)=\frac{1}{2}\{-2t+8+(-2t^2+8t)\}(t-1)+\frac{1}{2}\{(-2t^2+8t)+4t\}(2-t)$$
$$=-4t^2+13t-4$$

[3] $2<t<4$ のとき

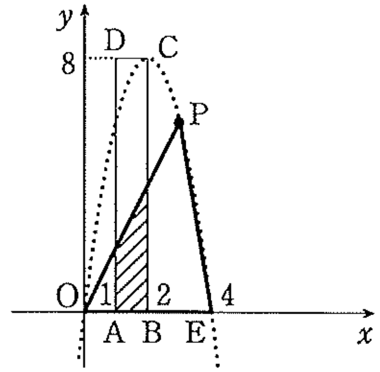
共通部分は，右図の斜線部分.

②で　$x=1$ のとき　$y=-2t+8$

　　　$x=2$ のとき　$y=-4t+16$

よって

$$f(t)=\frac{1}{2}\{(-2t+8)+(-4t+16)\}\cdot 1$$
$$=-3t+12$$

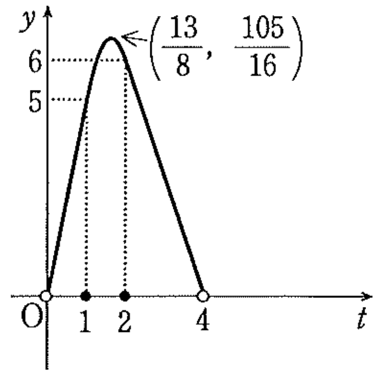


(2) (1)から

$$f(t)=\begin{cases}5t & (0<t\leqq 1)\\ -4\left(t-\dfrac{13}{8}\right)^2+\dfrac{105}{16} & (1<t\leqq 2)\\ -3t+12 & (2<t<4)\end{cases}$$

$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる.

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{13}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{105}{16}$ をとる.



4

解説

$(e^{-x}\sin nx)'=-e^{-x}\sin nx+ne^{-x}\cos nx$ ……①

$(e^{-x}\cos nx)'=-e^{-x}\cos nx-ne^{-x}\sin nx$ ……②

①+②×n より

$(e^{-x}\sin nx+ne^{-x}\cos nx)'=-(n^2+1)e^{-x}\sin nx$

これより　$\displaystyle\int e^{-x}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx+n\cos nx)+C$ （C は積分定数）

$$\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|dx=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi}e^{-x}|\sin nx|dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n^2-1}\int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi}(-1)^k e^{-x}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n^2-1}(-1)^{k+1}\Big[e^{-x}(\sin nx+n\cos nx)\Big]_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n^2-1}(-1)^{k+1}\left\{e^{-\frac{k+1}{n}\pi}\cdot n\cos(k+1)\pi-e^{-\frac{k}{n}\pi}\cdot n\cos k\pi\right\}$$

$$=\frac{n}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n^2-1}(-1)^{k+1}\left\{(-1)^{k+1}e^{-\frac{k+1}{n}\pi}-(-1)^k e^{-\frac{k}{n}\pi}\right\}$$

$$=\frac{n}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n^2-1}\left(e^{-\frac{k+1}{n}\pi}+e^{-\frac{k}{n}\pi}\right)$$

$$=\frac{n}{n^2+1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\sum_{k=0}^{n^2-1}e^{-\frac{k}{n}\pi}$$

$$=\frac{n}{n^2+1}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\times\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\left(e^{-\frac{\pi}{n}}+1\right)\left(1-e^{-n\pi}\right)\cdot\frac{1}{n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}$$

$-\dfrac{\pi}{n}=t$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\pi(e^t-1)}{t}=\pi\lim_{t\to 0}\frac{e^t-e^0}{t-0}=\pi$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|dx=\frac{1}{1+0}\times(1+1)(1-0)\times\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$