

1

a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である.

また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

(1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.

(2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

2

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする. 4 次方程式

$f(x) = 0$ の重複も含めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという.

このとき a, b, c の値を求めよ.

3

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする.

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすものとする.

(A) $f(-1) = -1, f(1) = 1$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し, $f(x) \leq 3x^2 - 1$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx$ のとりうる値の範囲を求めよ.