$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$\arg z_{n+1} = \arg z_n + (2n+1)\arg w$ であるから

$n \geqq 2$ のとき　$\arg z_n = \arg z_1 + \left\{\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\right\}\arg w = n^2 \arg w = 5° \times n^2$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，z_n が実数 $\Longleftrightarrow 5° \times n^2 = 180° \times k$ (k は整数)

$\Longleftrightarrow n^2 = 36k$

ゆえに，z_n が実数になるための必要十分条件は n が6の倍数であることである．

(2)　$\arg \dfrac{z_{n+1}}{z_n} = (2n+1)\arg w = 5° \times (2n+1)$

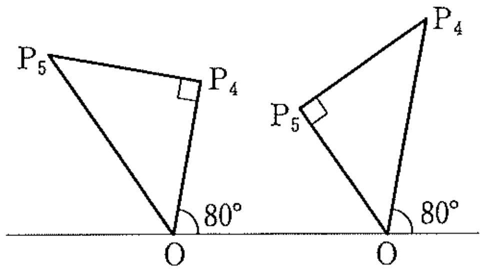
$1 \leqq n \leqq 17$ であるから　$15° \leqq 5° \times (2n+1) \leqq 175°$

$\triangle OP_nP_{n+1}$ が直角二等辺三角形であるから

$5° \times (2n+1) = 45°$ または $90°$　　n は正の整数であるから　$n=4$

よって　$\angle P_4OP_5 = 45°$ であるから　$|w|^9 = \sqrt{2}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$|w| = a$ であるから　$a = 2^{\frac{1}{18}}$ または $2^{-\frac{1}{18}}$



$\boxed{2}$

(解説)

方程式 $f(x)=0$ の整数解の1つを $x=n$ とすると

$n(n^3+an^2+bn+c)=-1$

a，b，c，n はすべて整数であるから　$n=\pm 1$

[1]　$f(x)=0$ が $x=1$ を重解にもつとき $f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$ と表される．

よって　$f(x)=x^4+(p-2)x^3-2(p-1)x^2+(p-2)x+1$ ……①

ゆえに，a，b，c は整数であるから p は整数．

また　$x^2+px+1=0$ は虚数解をもつ．

よって　$D=p^2-4<0$　かつ　p は整数．

ゆえに　$p=\pm 1$，0

①から，$p=1$ のとき　$a=c=-1$，$b=0$

$p=0$ のとき　$a=c=-2$，$b=2$

$p=-1$ のとき　$a=c=-3$，$b=4$

[2]　$f(x)=0$ が $x=\pm 1$ を解にもつとき $f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$ と表される．

このとき，$x^2+qx-1=0$ は虚数解をもたない．

よって，不適．

[3]　$f(x)=0$ が $x=-1$ を重解にもつとき $f(x)=(x+1)^2(x^2+rx+1)$ と表される．

よって　$f(x)=x^4+(r+2)x^3+2(r+1)x^2+(r+2)x+1$ ……②

[1]と同様にして　$r=\pm 1$，0

②から $r=1$ のとき　$a=c=3$，$b=4$

$r=0$ のとき　$a=b=c=2$

$r=-1$ のとき　$a=c=1$，$b=0$

以上から　$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1)$，$(-2,\ 2,\ -2)$，$(-3,\ 4,\ -3)$，$(3,\ 4,\ 3)$，

$(2,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 0,\ 1)$

$\boxed{3}$

(解説)

$f(-1)=-1$ から　$a-b+c=-1$ ……①

$f(1)=1$ から　$a+b+c=1$ ……②

①，②から　$b=1$，$c=-a$

ゆえに　$f(x)=ax^2+x-a$

$g(x)=3x^2-1-f(x)$ とおくと

$g(x)=(3-a)x^2-x+a-1$ ……③

$a=3$ のとき　$g(x)=-x+2$

　これは，傾きが -1 の直線を表し，$g(1)=1>0$ であるから適する．

$a>3$ のとき　③は上に凸の放物線を表し，

　$g(-1)=3-a+1+a-1=3>0$，

　$g(1)=3-a-1+a-1=1>0$　であるから適する．

$a<3$ のとき　③は下に凸の放物線を表し，

$$g(x)=(3-a)\left\{x-\frac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\frac{1}{4(3-a)}+a-1$$

　$a<3$ であるから　$\dfrac{1}{2(3-a)}>0$

　$\dfrac{1}{2(3-a)}\geqq 1$ のとき $g(1)=1>0$ であるから適する．

　このとき　$\dfrac{5}{2}\leqq a<3$

　$0<\dfrac{1}{2(3-a)}<1$ のとき　すなわち　$a<\dfrac{5}{2}$ のとき

　$-\dfrac{1}{4(3-a)}+a-1\geqq 0$ から　$-1+4(3-a)(a-1)\geqq 0$

　すなわち　$4a^2-16a+13\leqq 0$

　これを解くと　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$

　$a<\dfrac{5}{2}$ であるから　$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{2}$

以上から，$-1\leqq x\leqq 1$ で常に $g(x)\geqq 0$ となる a の値の範囲は $a\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ となる．

このとき　$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2dx=2\int_0^1(4a^2x^2+1)dx=2\left(\frac{4}{3}a^2+1\right)=\frac{8}{3}a^2+2$

したがって　$I\geqq\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2+2=\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$