$\boxed{1}$

(解説)

前半で試行を m 回行って，表が n 回出たとする。

条件から　$m \geqq 103$　……①

$0.5095 \leqq \dfrac{n}{m} < 0.5105$　……②

$\dfrac{n+99}{m+200} = 0.5$　……③

③から　$n = \dfrac{1}{2}(m+200) - 99 = \dfrac{1}{2}(m+2)$　……④

④を②に代入して　$1.0190 \leqq 1 + \dfrac{2}{m} < 1.0210$

よって　$0.0095 \leqq \dfrac{1}{m} < 0.0105$

各辺の逆数をとると　$\dfrac{10000}{95} \geqq m > \dfrac{10000}{105}$

①と合わせて　$103 \leqq m \leqq \dfrac{10000}{95} = 105.2\cdots\cdots$

m は整数であるから　$m = 103,\ 104,\ 105$

ここで，④より m は偶数となるから　$m = 104$

よって，求める回数は 104 回

$\boxed{2}$

(解説)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 &= \cos\alpha+\cos\beta+\cos(180^\circ-(\alpha+\beta))-1\\
&= \cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)-1\\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(-2)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{-\beta}{2}\\
&= 4\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq \gamma \leqq 180^\circ$ であるから

$0^\circ \leqq \dfrac{\alpha}{2} \leqq 90^\circ$，$0^\circ \leqq \dfrac{\beta}{2} \leqq 90^\circ$，$0^\circ \leqq \dfrac{\gamma}{2} \leqq 90^\circ$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2} \geqq 0$，$\sin\dfrac{\beta}{2} \geqq 0$，$\sin\dfrac{\gamma}{2} \geqq 0$

ゆえに　$4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} \geqq 0$

したがって　$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \geqq 1$

3

(解説)

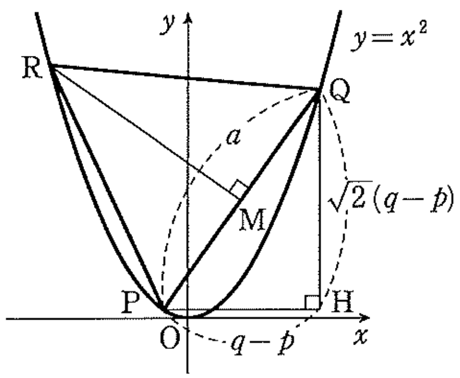
$P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ $(p<q)$ とおける．

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ であるから $\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2}$

すなわち　$p+q=\sqrt{2}$ ……①

点 Q を通って y 軸に平行な直線と，点 P を通って x 軸に平行な直線との交点を H とすると

$$\mathrm{PH}=q-p,\ \mathrm{QH}=\sqrt{2}(q-p)$$



△QPH において，三平方の定理から

$$(q-p)^2+\{\sqrt{2}(q-p)\}^2=a^2$$

$q-p>0$ であるから　$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ……②

①，②から　$p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$，$q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

ここで　$pq=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^2}{12}$ ……③

線分 PQ の中点 M の座標は　$\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

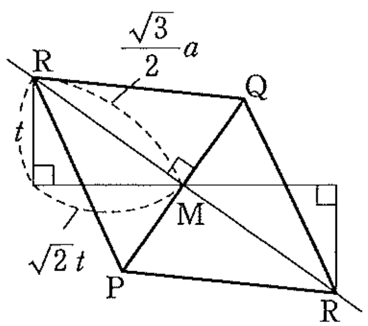
①，③から　$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{(p+q)^2-2pq}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}$

ゆえに　$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$

△PQR は正三角形であるから　$\mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

また，RM⊥PQ であるから，直線 RM の傾きは

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



よって，R と M の x 座標の差は $\sqrt{2}t$，y 座標の差は t とおける．

三平方の定理から　$t^2+(\sqrt{2}t)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

よって　$t=\dfrac{a}{2}$　　ゆえに，点 R の座標は

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}-\dfrac{a}{2}\right)$ または $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{a}{2}\right)$

[1]　$R\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}-\dfrac{a}{2}\right)$ のとき，点 R は放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}-\frac{a}{2}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+a)\right\}^2$$

すなわち　$5a^2+18a=0$　　よって　$a=0,\ -\dfrac{18}{5}$

題意より，$a>0$ であるから不適．

[2]　$R\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{a}{2}\right)$ のとき，点 R は放物線 $y=x^2$ 上にあるから

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}+\frac{a}{2}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\right\}^2$$

すなわち　$5a^2-18a=0$　　よって　$a=0,\ \dfrac{18}{5}$

題意より，$a>0$ であるから　$a=\dfrac{18}{5}$

以上から　$a=\dfrac{18}{5}$