1

(解説)

500円玉のうち，特定の1枚をAとする。

Aを除いたとき，100円玉，500円玉はいずれも n 枚となる。500円玉の表の枚数を X，100円玉の表の枚数を Y とする。Aが表の場合と裏の場合を考慮して，求める確率は

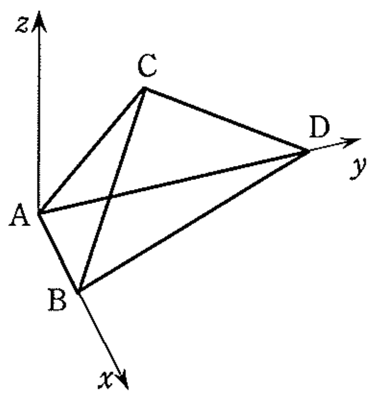
$$\frac{1}{2}\times P(X\geqq Y)+\frac{1}{2}\times P(X>Y)=\frac{1}{2}\{1-P(X<Y)\}+\frac{1}{2}P(X>Y)$$

$$=\frac{1}{2}\qquad (P(X<Y)=P(X>Y)\text{ から})$$

2

(解説)

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AD}=3$，$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ から，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 3,\ 0)$ となるように座標軸をとれる。$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ (ただし $z\geqq 0$) とおく。



$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=2$ から　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$

よって　$x=1$

Cから y 軸に垂線CHを下ろすと，$\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$，

$\mathrm{AC}=2$ から　$\angle\mathrm{CHA}=90^\circ$　　よって　$y=1$

$\mathrm{AC}=2$ から　$x^2+y^2+z^2=4$

$x=y=1$，$z\geqq 0$ から　$z=\sqrt{2}$

よって　$\mathrm{C}(1,\ 1,\ \sqrt{2})$

$\mathrm{E}(p,\ q,\ r)$ とおく。

条件より $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\mathrm{CE}=\mathrm{DE}$ であるから

$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+q^2+r^2=(p-1)^2+(q-1)^2+(r-\sqrt{2})^2=p^2+(q-3)^2+r^2$$

ゆえに　$0=-2p+1=-2p-2q-2\sqrt{2}r+4=-6q+9$

これを解くと　$p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{3}{2}$，$r=0$

よって　$\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 0\right)$

ゆえに　$\mathrm{AE}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+0}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

3

(解説)

(1)　$y=x^n$ から　$y'=nx^{n-1}$　　　$y=a\log x$ から　$y'=\frac{a}{x}$

2曲線は点Pで共通接線をもつから　$t^n=a\log t$　……①，$nt^{n-1}=\frac{a}{t}$　……②

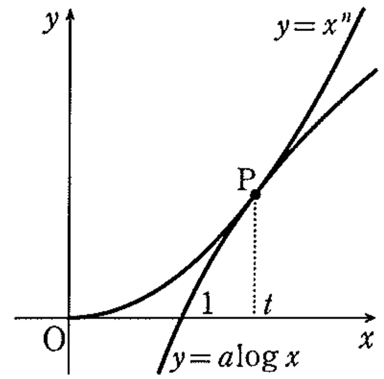
②から　$t^n=\frac{a}{n}$

これを①に代入して　$\frac{a}{n}=a\log t$

$a\neq 0$ であるから　$t=e^{\frac{1}{n}}$

よって　$a=nt^n=ne$

(2)　$S_1=\int_0^t x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^t=\frac{1}{n+1}t^{n+1}=\frac{1}{n+1}e^{\frac{n+1}{n}}$



$S_2=\int_1^t a\log x\,dx$

$=a\Big[x\log x-x\Big]_1^t=a(t\log t-t+1)$

$=ne\left(e^{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{n}-e^{\frac{1}{n}}+1\right)=e^{\frac{n+1}{n}}-ne^{\frac{n+1}{n}}+ne$

ゆえに　$\frac{S_2}{S_1}=(n+1)e^{-\frac{n+1}{n}}\left(e^{\frac{n+1}{n}}-ne^{\frac{n+1}{n}}+ne\right)$

$$=(n+1)\left(1-n+ne^{-\frac{1}{n}}\right)=n(n+1)\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-1\right)$$

(3)　(a)　$f(x)=\frac{x^2}{2}-e^{-x}-x+1$ とおくと　$f'(x)=x+e^{-x}-1$

$$f''(x)=1-e^{-x}$$

$x\geqq 0$ のとき　$f''(x)\geqq 0$

よって，$x\geqq 0$ のとき　$f'(x)\geqq f'(0)=0$

したがって，$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq f(0)=0$

すなわち　$e^{-x}+x-1\leqq\frac{x^2}{2}$

(b)　$g(x)=e^{-x}+x-1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ とおくと　$g'(x)=-e^{-x}-x+\frac{x^2}{2}+1$

$$g''(x)=e^{-x}+x-1$$

(a)より，$x\geqq 0$ のとき　$g''(x)\geqq 0$

よって，$x\geqq 0$ のとき　$g'(x)\geqq g'(0)=0$

したがって，$x\geqq 0$ において　$g(x)\geqq g(0)=0$

すなわち　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1$

$\boxed{\text{別解}}$ (a)　$t\geqq 0$ のとき

$e^{-t}\leqq 1$ であるから　$\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt\leqq\int_0^x dt$

よって　$-e^{-x}+1\leqq x\quad(x\geqq 0)$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^x(-e^{-t}+1)dt\leqq\int_0^x t\,dt$

したがって　$e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{1}{2}x^2$

(b)　$\displaystyle\int_0^x(e^{-t}+t-1)dt\leqq\int_0^x\frac{1}{2}t^2dt$ であるから　$-e^{-x}+1-x+\dfrac{1}{2}x^2\leqq\dfrac{1}{6}x^3$

よって　$e^{-x}+x-1\geqq\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x^3$

(4)　$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{x^2}{2}$ に $x=\dfrac{1}{n}$ (>0) を代入すると

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}\leqq e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-1\leqq\frac{1}{2n^2}$$

辺々に $n(n+1)$ を掛けて整理すると

$$\frac{(3n-1)(n+1)}{6n^2}\leqq n(n+1)\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-1\right)\leqq\frac{n+1}{2n}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{n\to\infty}n(n+1)\left(e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{2}$