

1

定積分  $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$  を求めよ。

2

1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

3

$xy$  平面において、原点  $O$  を通る半径  $r (r > 0)$  の円を  $C$  とし、その中心を  $A$  とする。 $O$  を除く  $C$  上の点  $P$  に対し、次の 2 つの条件 (a), (b) で定まる点  $Q$  を考える。

(a)  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  の向きが同じ。 (b)  $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$

- (1) 点  $P$  が  $O$  を除く  $C$  上を動くとき、点  $Q$  は  $\overrightarrow{OA}$  に直交する直線上を動くことを示せ。  
(2) (1) の直線を  $\ell$  とする。 $\ell$  が  $C$  と 2 点で交わるとき、 $r$  のとりうる値の範囲を求めよ。

4

$n$  を自然数とする。関数  $y = \sqrt{x}$  のグラフを  $C$  とし、 $C$  上の 2 点  $(n, \sqrt{n})$  と  $(n+1, \sqrt{n+1})$  を通る直線を  $\ell$  とする。 $C$  と  $\ell$  で囲まれた部分を  $x$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V$  とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = b$  を満たす正の数  $a, b$  を求めよ。