高2理系数学総合S　11月7日提出課題　～極限～

$\boxed{1}$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=(1-\alpha)a_{n+1}+\alpha a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。ただし，α は $0<\alpha<1$ を満たす定数である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}$ となる α を求めよ。

$\boxed{2}$

n を自然数，$r>1$ とする。$a>0$，$n\geqq 3$ のとき，不等式 $(1+a)^n>\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つことを用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$ を求めよ。

$\boxed{3}$

無限級数 $3-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}-\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{9}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{2n+1}{n}-\dfrac{2n+3}{n+1}+\cdots\cdots$ の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

$\boxed{4}$

円 $C_1：x^2+y^2=1$ に内接する正方形の面積を a_1 とする。つぎに，この正方形に内接する円 C_2 を作成し，C_2 に内接する正方形の面積を a_2 とする。このような手順にならい，正方形に内接する円 C_n $(n\geqq 3)$ を順次作成し，C_n に内接する正方形の面積を a_n とする。無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値になるように定数 a の値を定め，そのときの極限値を求めよ。

$\boxed{6}$

関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$　　(2)　$\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$

解答　0

$\boxed{3}$

解答　発散

$\boxed{4}$

解答　4

$\boxed{5}$

解答　$a=4$，極限値 1

$\boxed{6}$

解答　$a=b$，$c=1$

$\boxed{1}$

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\alpha(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=-\alpha b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=1$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 $-\alpha$ の等比数列であるから，一般項は　$b_n=(-\alpha)^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=0+\sum_{k=1}^{n-1}(-\alpha)^{k-1}=\frac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=\dfrac{1-1}{1+\alpha}=0$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=\dfrac{1-(-\alpha)^{n-1}}{1+\alpha}$

(2)　$0<\alpha<1$ より，$-1<-\alpha<0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1+\alpha}$

ゆえに，$\dfrac{1}{1+\alpha}=\dfrac{2}{3}$ を解いて　$\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$

$r=1+a$ とおくと，$r>1$ より　$a>0$

$a>0$，$n\geqq 3$ のとき，$r^n=(1+a)^n>\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ であるから

$$0<\frac{1}{r^n}<\frac{6}{n(n-1)(n-2)a^3}\qquad よって\qquad 0<\frac{n^2}{r^n}<\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}=0$$

参考　$a>0$，$n\geqq 3$ のとき，$r^n=(1+a)^n>\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ であることの証明

二項定理により　$(1+a)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k$

$a>0$，$n\geqq 3$ のとき，${}_n\mathrm{C}_k a^k>0$（$k=0$，1，2，……，n）であるから

$$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k>{}_n\mathrm{C}_3a^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

$\boxed{3}$

$$S_{2n}=3-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{3}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\cdots\cdots-\frac{2n+1}{n}+\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+3}{n+1}$$
$$=3-\frac{2n+3}{n+1}$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(-\frac{2n+3}{n+1}\right)=3$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1$

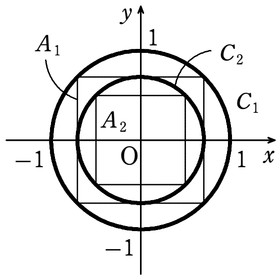
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=3$$

したがって，与えられた無限級数は発散する。

参考　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=-2\neq 0$ であるから，与えられた無限級数は発散する。

4

円 C_n に内接する正方形を A_n とし，A_n をその1辺が x 軸に平行になるように作る。



円 C_n の半径を r_n とすると，正方形 A_n の1辺の長さは

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r_n=\sqrt{2}\,r_n$$

また，正方形 A_n の1辺の長さは $2r_{n+1}$ であるから

$$2r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$$

すなわち　$r_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r_n$

$r_1=1$ であるから，数列 $\{r_n\}$ は初項1，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列である。

ゆえに　$r_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

正方形 A_n の1辺の長さは　$2r_{n+1}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

よって　$a_n=\left\{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}^2=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

5

$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値をもつためには

$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}-8)=0$ であることが必要。

よって　$a\sqrt{1+3}-8=0$　　　すなわち　$2a-8=0$

したがって　$a=4$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4\{(\sqrt{x+3})^2-2^2\}}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to1}\frac{4}{\sqrt{x+3}+2}=1$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ は有限な値になる。

したがって　$a=4$

そのときの極限値は　1

6

[1]　$-1<x<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=-x^2+bx+c$

[2]　$x<-1$，$1<x$ のとき　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{x}-\frac{1}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}+\frac{c}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$

[3]　$x=-1$ のとき　$f(-1)=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

[4]　$x=1$ のとき　$f(1)=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

$f(x)$ は $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ において，それぞれ連続である。

したがって，$f(x)$ が x の連続関数となるための条件は，$x=-1$ および $x=1$ で連続であることである。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)$　かつ　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

ゆえに　$-a=-1-b+c=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$，　$-1+b+c=a=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

したがって　$a=b$，$c=1$