$\boxed{1}$

(1)　$\log_{10}10 = \boxed{\text{ア}}$ である。また，$\log_{10}5$，$\log_{10}15$ をそれぞれ $\log_{10}2$ と $\log_{10}3$ を用いて表すと

$$\log_{10}5 = \boxed{\text{イ}}\log_{10}2 + \boxed{\text{ウ}}$$

$$\log_{10}15 = \boxed{\text{エ}}\log_{10}2 + \log_{10}3 + \boxed{\text{オ}}$$

となる。

(2)　太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。
以下では，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。
花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10}15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10}15^{20}$ は

$$\boxed{\text{カキ}} < \log_{10}15^{20} < \boxed{\text{カキ}} + 1$$

を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{\text{クケ}}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10}15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。
花子：$N \cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}} < 15^{20} < (N+1) \cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10}15^{20}$ の小数部分は $\log_{10}15^{20} - \boxed{\text{カキ}}$ であり

$$\log_{10}\boxed{\text{コ}} < \log_{10}15^{20} - \boxed{\text{カキ}} < \log_{10}\left(\boxed{\text{コ}} + 1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{2}$

座標平面上の原点を中心とする半径1の円周上に3点 P $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, Q $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, R $(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta, \qquad t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta$$

(1) △PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察1

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと

$$\alpha = \theta + \frac{\boxed{\text{ア}}}{3}\pi, \quad \beta = \theta + \frac{\boxed{\text{イ}}}{3}\pi$$

であり，加法定理により

$$\cos\alpha = \boxed{\text{ウ}}, \quad \sin\alpha = \boxed{\text{エ}}$$

である。同様に，$\cos\beta$ および $\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから $s = t = \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	① $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
② $\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$
④ $-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$
⑥ $-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$

考察2

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y = x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y = x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta = \frac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha < \frac{5}{4}\pi$，β は $\frac{5}{4}\pi < \beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta = \cos\alpha$，$\cos\beta = \sin\alpha$ が成り立つ。よって，

$$s = t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}} + \sin\alpha + \cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{12}\pi,\quad \beta=\frac{\boxed{\text{シス}}}{12}\pi$$

のとき，$s=t=0$ である。

(2) 次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察 3

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α，β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同時に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

という関係が得られる。

(3) これまでの考察を振り返ると，次の ⓪ ～ ③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

① △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

② △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③ △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

$\boxed{3}$

O を原点とする座標平面において，円 $x^2+y^2=4$ を C，円 $x^2+(y-5)^2=1$ を C' とし，C' の中心を O′ とする。C と C' の両方に接する直線のうち，C との接点と C' との接点がともに第 1 象限にある直線を ℓ とする。また，ℓ と y 軸の交点，ℓ と C の接点，ℓ と C' の接点をそれぞれ A，P，P′ とする。このとき，ℓ の方程式と A，P，P′ の座標を求めよう。

(1) O′ の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

(2) A は線分 OO′ を $\boxed{\text{ウ}}$：1 に外分する点であるから，A の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{エオ}}\right)$ である。したがって，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{カキ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,x+\boxed{\text{ケコ}}$$

である。

(3) P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

である。

(4) P′ は線分 AP を 1：$\boxed{\text{タ}}$ に内分する点である。したがって，P′ の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}},\ \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\right)$$

である。

$\boxed{4}$

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　1回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均(期待値) m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n=\boxed{\text{アイウ}}$，$p=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(2)　(1)の反復試行において，W が38以上となる確率の近似値を求めよう。

いま　$P(W \geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma} \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$ と変形できる。ここで，

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq -\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)=0.\boxed{\text{コサ}}$$

(3)　連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s \leqq x \leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)dx$$

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は

$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{5}$

初項 a_1 が 1 であり，次の条件 ①，② によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考えよう。

$$a_{2n}=a_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_{2n+1}=a_n+a_{n+1} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　① により $a_2=a_1$ となるので $a_2=1$ であり，② により $a_3=a_1+a_2$ となるので $a_3=2$ である。同様に

$$a_4=\boxed{\text{ア}},\ a_5=\boxed{\text{イ}},\ a_6=\boxed{\text{ウ}},\ a_7=\boxed{\text{エ}}$$

である。

また，a_{18} については，$a_{18}=a_9$ により $a_{18}=\boxed{\text{オ}}$ であり，a_{38} については，$a_{38}=a_{19}=a_9+a_{10}$ により $a_{38}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　k を自然数とする。① により $\{a_n\}$ の第 $3\cdot2^k$ 項は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の第 3 項以降を次のように群に分ける。ただし，第 k 群は 2^k 個の項からなるものとする。

$a_3,\ a_4$	$a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$	$a_9,\ \cdots\cdots,\ a_{16}$	$a_{17},\ \cdots\cdots$
第 1 群	第 2 群	第 3 群	

2 以上の自然数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}2^j=\boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}$ なので，第 k 群の最初の項は，$\{a_n\}$ の第 $\left(\boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{ケ}}}+\boxed{\text{サ}}\right)$ 項であり，第 k 群の最後の項は，$\{a_n\}$ の第 $\boxed{\text{ク}}^{\boxed{\text{シ}}}$ 項である。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$k-2$　　①　$k-1$　　②　k　　③　$k+1$　　④　$k+2$

第 k 群に含まれるすべての項の和を S_k，第 k 群に含まれるすべての奇数番目の項の和を T_k，第 k 群に含まれるすべての偶数番目の項の和を U_k とする。

たとえば

$$S_1=a_3+a_4,\qquad T_1=a_3,\qquad U_1=a_4$$

$$S_2=a_5+a_6+a_7+a_8,\qquad T_2=a_5+a_7,\qquad U_2=a_6+a_8$$

であり

$$S_1=\boxed{\text{ス}},\ S_2=\boxed{\text{セ}},\ T_2=\boxed{\text{ソ}},\ U_2=\boxed{\text{タ}}$$

である。

(4)　(3) で定めた数列 $\{S_k\}$，$\{T_k\}$，$\{U_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよう。

① により $U_{k+1}=\boxed{\text{チ}}$ となる。また，$\{a_n\}$ の第 2^k 項と第 2^{k+1} 項が等しいことを用いると，② により $T_{k+1}=\boxed{\text{ツ}}$ となる。したがって，$S_{k+1}=T_{k+1}+U_{k+1}$ を用いると，$S_{k+1}=\boxed{\text{テ}}$ となる。$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　S_k　　①　S_k+3k　　②　T_k

③　U_k　　④　$2S_k$　　⑤　$2T_k$

⑥　$2T_k+2k-1$　　⑦　$2T_k+k(k+1)$　　⑧　$3S_k$

⑨　$3S_k+(k-1)(k-2)$

以上のことから

$$S_k=\boxed{\text{ト}},\ T_k=\boxed{\text{ナ}},\ U_k=\boxed{\text{ニ}}$$

である。$\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$2k^2-4k+3$　　①　3^{k-1}

②　$2^{k+1}-2k-1$　　③　$2^{k+2}-2k^2-5$

④　$4k^2-8k+6$　　⑤　$2\cdot 3^{k-1}$

⑥　$2^{k+2}-4k-2$　　⑦　$2^{k+3}-4k^2-10$

⑧　$6k^2-12k+9$　　⑨　3^k

ⓐ　$3\cdot 2^{k+1}-6k-3$　　ⓑ　$3\cdot 2^{k+2}-6k^2-15$

$\boxed{6}$

座標空間において 4 点 A (2, 0, 0), B (1, 1, 0), C (1, 0, 1), D(x, y, z) を考える。

(1) 三つのベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ について

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\boxed{\text{ア}}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{\text{イ}}\quad\cdots\cdots②$$

である。$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$	① $y-z-1$	② $z-x-1$
③ $x-y$	④ $y-z$	⑤ $z-x$
⑥ $x-y+1$	⑦ $y-z+1$	⑧ $z-x+1$

(2) $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ により，三角形 ABC は正三角形である。以下，4 点 A, B, C, D が，正四面体の四つの頂点になるとする。このときの x, y, z の値を求めよう。ただし，$x>1$ とする。

ベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ の大きさは，いずれも $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，どの二つのベクトルのなす角も $\boxed{\text{オカ}}°$ である。

よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{\text{キ}}$ となる。

このことと ①, ② および $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ により，

$(x, y, z)=\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}\right)$ となる。

(3) $(x, y, z)=\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}\right)$ のときを考える。線分 AB の中点を P，線分 DA を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 DC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を R とする。三角形 PQR の面積 S が最小になるときの t の値を求めよう。

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}},\quad |\overrightarrow{PR}|^2=\boxed{\text{ソ}}\,t^2-\boxed{\text{タ}}\,t+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると，$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned}4S^2&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\sin^2\theta\\&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\cos^2\theta\\&=t^2-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}t+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\end{aligned}$$

である。

よって，S は $t=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ のとき最小になる。