高2理系数学総合S　課題（1月6日まで）～面積·体積等～

$\boxed{1}$

2つの曲線 C_1：$y=\log x$，C_2：$y=2\log(x-2)$ がある。

(1)　曲線 $y=2\log(x-2)$ の逆関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1，曲線 C_2 および直線 $y=0$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

2つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

$y=e^x$ のグラフと，x 軸および2直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれる図形を D とする。
点 $(a,\ 0)$ を通る傾きが e の直線で D を分割する。こうして得られた2つの図形の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ。

$\boxed{4}$

n を自然数とし，正の実数全体で定義された関数 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}\log x$ について考える。

(1)　この関数の極値を求めよ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ におけるこの関数のグラフ，x 軸および直線 $x=e$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　(2) で求めた面積を S_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$

xy 平面において，曲線 $y=\log x$ $(1\leqq x\leqq e^2)$ と，x 軸，y 軸および直線 $y=2$ とで囲まれる図形 D を考える。

(1)　図形 D を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(2)　図形 D を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$

曲線 $y=\sqrt{x}$，直線 $y=x-2$ および y 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{7}$

$V=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2\leqq 1\right\}$ とする。

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　V の体積を求めよ。

$\boxed{8}$

xy 平面上の曲線 $x=t^3$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{t^2}$ $(1\leqq t\leqq 2)$，2直線 $x=1$，$x=8$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{9}$

数直線上を動く点Pの座標 x が，時刻 t の関数として，$x=t^3-9t^2+15t$ と表されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　点Pの速さが0になる時刻をすべて求めよ。

(2)　$t=0$ から $t=10$ までに点Pが動く道のりを求めよ。

$\boxed{10}$

曲線 $y=e^x$ の $0\leqq x\leqq 3$ に対応する部分を y 軸の周りに回転してできる容器がある。これに毎秒 a の割合で上から水を注ぐ。

(1)　この容器に水が一杯になるのは何秒後か。

(2)　この水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ になった瞬間の水深を求めよ。

$\boxed{1}$

(1)　$y=2\log(x-2)$ を x について解くと

$$\frac{y}{2}=\log(x-2)$$

すなわち　$e^{\frac{y}{2}}=x-2$

よって　$x=e^{\frac{y}{2}}+2$

したがって，求める逆関数は x と y を入れ替えて　$y=e^{\frac{x}{2}}+2$

(2)　$x>2$ のとき，曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点について

$$\log x=2\log(x-2)$$

すなわち　$x=(x-2)^2$

これを解くと　$x=4$

よって，交点の座標は　$(4,\ 2\log 2)$

また，$y=\log x$ を x について解くと　$x=e^y$

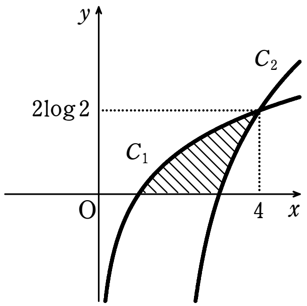
これと (1) より，求める面積 S は

$$S=\int_0^{2\log 2}\left\{\left(e^{\frac{y}{2}}+2\right)-e^y\right\}dy$$

$$=\left[2e^{\frac{y}{2}}+2y-e^y\right]_0^{2\log 2}$$

$$=(2e^{\log 2}+4\log 2-e^{2\log 2})-(2-1)$$

$$=4\log 2-1$$



$\boxed{2}$

$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　……①，　$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$　……②　とする。

楕円①，②は，それぞれ x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

①から　$y^2=1-\dfrac{x^2}{3}$　……③

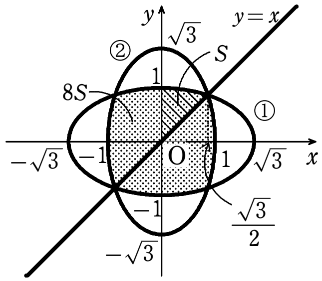
これを②に代入して　$x^2+\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)=1$

これを解くと　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

③から　$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(複号任意)

よって，第1象限において，①と②の交点は

点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。



右の図の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$ である。

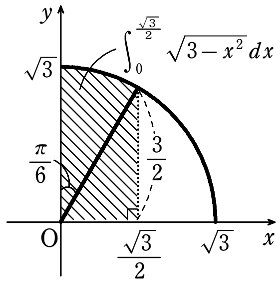
③において，$y\geqq 0$ とすると　$y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{3}}$

よって

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-x^2}\,dx-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\right\}-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$



したがって，求める面積は　$8S=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$\boxed{3}$

D の面積は　$S=\displaystyle\int_{-1}^{1}e^x dx=e-\frac{1}{e}$

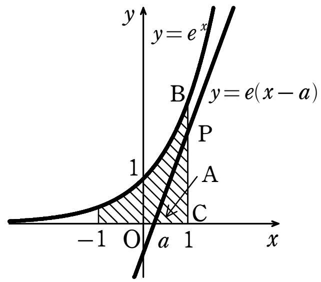
A$(a,\ 0)$ を通る傾き e の直線 ℓ の方程式は

$$y=e(x-a)$$

直線 ℓ が B$(1,\ e)$ を通るとき，ℓ は曲線 $y=e^x$ の接線となる。

また，このとき，ℓ は原点を通る。

C$(1,\ 0)$ とすると　$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}e$



$S<2\triangle\mathrm{OBC}$ であるから，直線 ℓ は線分 BC と共有点をもつ。

すなわち　$0<a<1$

ℓ と直線 $x=1$ の交点 P の座標は　$(1,\ e(1-a))$

△ACP の面積は　$\dfrac{1}{2}(1-a)\cdot e(1-a)=\dfrac{1}{2}e(1-a)^2$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}e(1-a)^2=\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$ から　$(1-a)^2=1-\dfrac{1}{e^2}$

$0<a<1$ から　$1-a=\sqrt{1-\dfrac{1}{e^2}}$

よって　$a=1-\sqrt{1-\dfrac{1}{e^2}}$　　すなわち　$a=1-\sqrt{1-e^{-2}}$

$\boxed{4}$

(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\log x+x^{\frac{1}{n}-1}=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}(\log x+n)$

$f'(x)=0$ とすると，$x>0$ であるから　$\log x+n=0$

ゆえに　$x=e^{-n}$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e^{-n}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

$f(e^{-n})=-\dfrac{n}{e}$ であるから，$f(x)$ は $x=e^{-n}$

で極小値 $-\dfrac{n}{e}$ をとる。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ で $f(x)\geqq 0$ であるから，求める面積は

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}}\log x\,dx$$

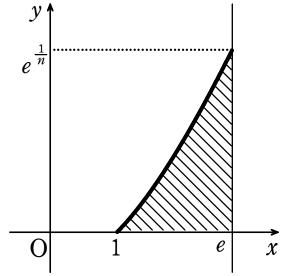
$$=\int_1^e \frac{n}{n+1}\left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)'\log x\,dx$$

$$=\left[\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(x^{\frac{n+1}{n}}\right)x^{-1}dx$$

$$=\frac{n}{n+1}e^{1+\frac{1}{n}}-\frac{n}{n+1}\int_1^e x^{\frac{1}{n}}dx$$

$$=\frac{n}{n+1}e^{1+\frac{1}{n}}-\left[\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}x^{1+\frac{1}{n}}\right)\right]_1^e$$

$$=\frac{n}{n+1}e^{1+\frac{1}{n}}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left(e^{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$



(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{1+\frac{1}{n}}=e$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=e-(e-1)=1$

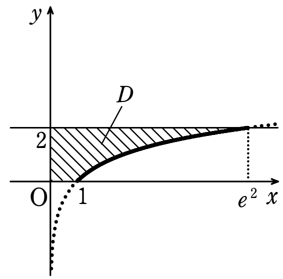
$\boxed{5}$

(1)　$y=\log x$ から　$x=e^y$

$x=1$ のとき　$y=0$，$x=e^2$ のとき　$y=2$

よって，求める回転体の体積は

$$\pi\int_0^2(e^y)^2dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$$



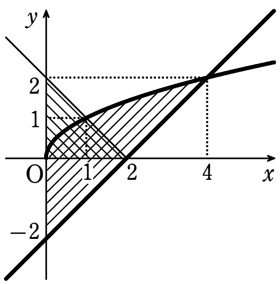
(2)　$\pi\left\{\displaystyle\int_0^{e^2}2^2dx-\int_1^{e^2}(\log x)^2dx\right\}$

$$=\pi\left\{\Big[4x\Big]_0^{e^2}-\Big[x(\log x)^2\Big]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=\pi\left(4e^2-4e^2+2\int_1^{e^2}\log x\,dx\right)=2\pi\left(\Big[x\log x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=2\pi\{2e^2-(e^2-1)\}=2\pi(e^2+1)$$

6



$y=\sqrt{x}$ と $y=x-2$ との共有点の x 座標は方程式

$$x-2=\sqrt{x}$$

の解である。

このとき，$\sqrt{x}\geqq 0$ から　　$x-2\geqq 0$

すなわち　　$x\geqq 2$

この方程式の両辺を 2 乗して　　$x^2-4x+4=x$

これを解くと，$x\geqq 2$ から　　$x=4$

よって，共有点の座標は　　$(4,\ 2)$

同様に $y=\sqrt{x}$ と $y=-x+2$ との共有点の座標は　$(1,\ 1)$

ゆえに　$V=\displaystyle\int_0^1 \pi(x-2)^2dx+\int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^1+\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4-\frac{8}{3}\pi$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)+\pi\left(8-\frac{1}{2}\right)-\frac{8}{3}\pi=\frac{43}{6}\pi$$

7

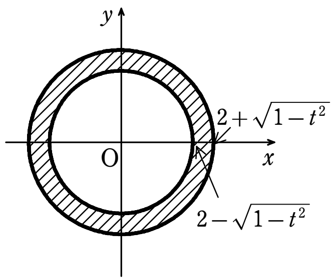
(1)　$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+t^2\leqq 1$ から

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2\leqq 1-t^2$$

$$-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}-2\leqq\sqrt{1-t^2}$$

よって　　$2-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2+\sqrt{1-t^2}$

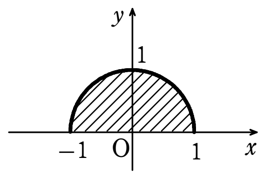
ゆえに，$S(t)$ は右の図の斜線部分 (境界線上の点を含む) の面積で



$$S(t)=(2+\sqrt{1-t^2})^2\pi-(2-\sqrt{1-t^2})^2\pi$$

$$=8\sqrt{1-t^2}\,\pi$$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^1 8\pi\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\times\frac{\pi}{2}=4\pi^2$



8

$x=t^3$ から　　$\dfrac{dx}{dt}=3t^2$

よって，$1\leqq t\leqq 2$ における x の値の変化は，右の表のようになる。

t	1	…	2
$\dfrac{dx}{dt}$		+	
x	1	↗	8

また，常に　　$y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{t^2}>0$

ゆえに，与えられた曲線は，$y>0$ の範囲にある。

よって，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_1^8 y^2dx=\pi\int_1^2 y^2\cdot\frac{dx}{dt}dt=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{t^2}\right)^2\cdot 3t^2dt=3\pi\int_1^2 te^{2t^2}dt$$

$$=3\pi\cdot\frac{1}{4}\int_1^2 e^{2t^2}\cdot(2t^2)'dt=\frac{3}{4}\pi\left[e^{2t^2}\right]_1^2=\frac{3}{4}e^2(e^6-1)\pi$$

9

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$　……①

よって，速さが 0 になる時刻は　　$t=1,\ 5$

(2)　① から，点 P の速度 v は

$t\leqq 1$ のとき　　　$v\geqq 0$

$1\leqq t\leqq 5$ のとき　　$v\leqq 0$

$5\leqq t$ のとき　　　$v\geqq 0$

よって，$t=0$ から $t=10$ までに点 P が動く道のりは

$$\int_0^{10}|v|dt=\int_0^1 vdt+\int_1^5(-v)dt+\int_5^{10}vdt$$

$$=\left[t^3-9t^2+15t\right]_0^1-\left[t^3-9t^2+15t\right]_1^5+\left[t^3-9t^2+15t\right]_5^{10}$$

$$=7-(-32)+275=314$$

$\boxed{10}$

(1)　この容器の容積を V とする。

$y=e^x$ であるから，$dy=e^x dx$

y と x の対応は右のようになる。

y	$1 \longrightarrow e^3$
x	$0 \longrightarrow 3$

$$V=\pi\int_1^{e^3} x^2 dy=\pi\int_0^3 x^2e^x dx=\pi\left(\Big[x^2e^x\Big]_0^3-\int_0^3 2xe^x dx\right)$$

$$=\pi\left\{\Big[x^2e^x\Big]_0^3-\left(\Big[2xe^x\Big]_0^3-2\int_0^3 e^x dx\right)\right\}=\pi\Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^3=\pi(5e^3-2)$$

よって　　$\dfrac{\pi}{a}(5e^3-2)$ 秒後

(2)　水面が t 秒後に $(x,\ e^x)$ にあるとき　$at=\pi\displaystyle\int_0^x s^2e^s ds$

両辺を t で微分して　$a=\pi x^2e^x\dfrac{dx}{dt}$　　　　ゆえに　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{a}{\pi x^2e^x}$

よって，水面の上昇速度について　$\dfrac{a}{4\pi}=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{a}{\pi x^2}$

ゆえに，水面の上昇速度が毎秒 $\dfrac{a}{4\pi}$ のとき　　$x=2$

このときの水深 $y-1$ は　　e^2-1