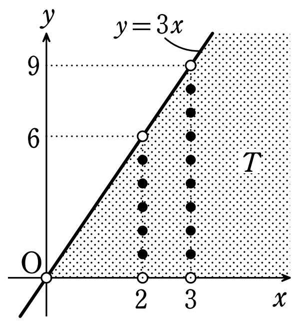
$\boxed{1}$

解説

(1)　直線 $x=2$ 上の格子点で $T$ の内部にあるものは

点 $(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(2,\ 5)$ の 5 個ある。

よって　　$a_2=$ ア$5$



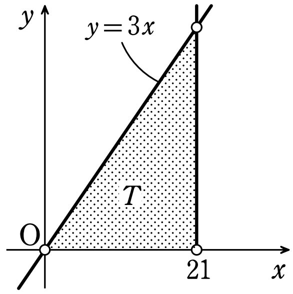

直線 $x=3$ 上の格子点で $T$ の内部にあるものは

点 $(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$，$(3,\ 7)$，$(3,\ 8)$ の 8 個ある。

よって　　$a_3=$ イ$8$

直線 $x=n$ 上の格子点で $T$ の内部にあるものの個数は，$n$ が 1 だけ大きくなると，3 個ずつ増えていくから，数列 $\{a_n\}$ は公差が エ$3$ の等差数列である。

（ウ ⓪，オ ⓪）




$1 \leqq n \leqq 20$ より，$T$ の内部にある格子点の個数は，初項 $a_1=2$，公差 3，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2+(20-1)\cdot 3\}=^{\text{カキク}}610$$

別解　直線 $x=n$ 上の格子点で $T$ の内部にあるものは

点 $(n,\ 1)$，$(n,\ 2)$，……，$(n,\ 3n-1)$ の $(3n-1)$ 個ある。

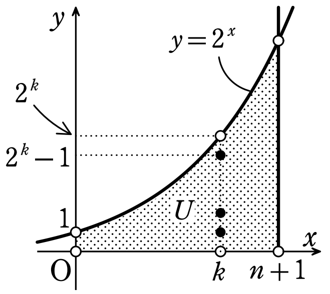
よって　　$a_n=3n-1$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 エ$3$ の等差数列である。　（ウ ⓪，オ ⓪）

したがって，$T$ の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{n=1}^{20}(3n-1)=\frac{3}{2}\cdot 20\cdot(20+1)-20=^{\text{カキク}}610$$

(2)　関数 $y=2^x$ のグラフと $x$ 軸，$y$ 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 $U$ は右の図のようになる。




直線 $x=k$ 上の格子点で $U$ の内部にあるものは

点 $(k,\ 1)$，$(k,\ 2)$，……，$(k,\ 2^k-1)$ の $(2^k-1)$ 個ある。　（ケ ⑦）

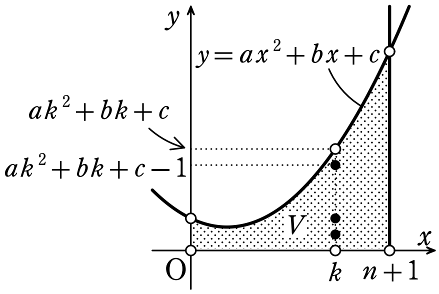
したがって，$U$ の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$

$$=2^{n+1}-n-2 \quad (\text{コ ①，サ ⑦})$$

(3)　$a>0$，$b^2-4ac<0$ であるとき，放物線 $y=ax^2+bx+c$ は下に凸で，$x$ 軸との共有点をもたない。

よって，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と $x$ 軸，$y$ 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 $V$ は右の図のようになる。




直線 $x=k$ 上の格子点で $V$ の内部にあるものの個数は　$(ak^2+bk+c-1)$ 個

したがって，$V$ の内部にある格子点の個数が $n^3$ となるとき

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)=n^3$$

すなわち　　$\dfrac{a}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{b}{2}n(n+1)+(c-1)n=n^3$

左辺を $n$ について整理すると

$$\frac{1}{3}an^3+\frac{1}{2}(a+b)n^2+\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)n=n^3$$

これがすべての自然数 $n$ に対して成り立つから

$$\frac{1}{3}a=1,\quad \frac{1}{2}(a+b)=0,\quad \frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1=0$$

これを解いて　　$a=^{シ}3$，$b=^{スセ}-3$，$c=^{ソ}2$

（これらは，$a$，$b$，$c$ が整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$ の条件を満たす。）

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　点 C は O を中心とする半径 1 の球面 $S$ 上にあるから　　$|\overrightarrow{OC}|=1$

よって　　$|\overrightarrow{OC}|^2=$ ア$1$

$C(x,\ y,\ z)$ であるから　　$x^2+y^2+z^2=1$　…… ①

△ABC が正三角形であるとするとき，△OAC と △OAB は，OA は共通な辺で，

OC＝OB，AC＝AB より　　$\triangle OAC \equiv \triangle OAB$

したがって，対応する角の大きさも等しいから　　$\angle AOC=\angle AOB$

また，点 A，B は球面 $S$ 上の点であるから　　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$

よって　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle AOC=\cos\angle AOC$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\cos\angle AOB$

これと $\angle AOC=\angle AOB$ から　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　(イ ④)

さらに，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OC}=(x,\ y,\ z)$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=x$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot a+0\cdot\sqrt{1-a^2}+0\cdot 0=a$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ から　　$x=a$　…… ②　(ウ ⓪)

同様に，$\triangle OBC \equiv \triangle OAB$ であるから　　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$a\cdot x+\sqrt{1-a^2}\cdot y+0\cdot z=a$

すなわち　　$ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$　…… ③　(エ ⓪，オ ⑤)

逆に，実数 $x$，$y$，$z$ が ①，②，③ を満たすとき，点 C は $S$ 上の点であり，△ABC は正三角形である。　　…… (*)

(2)　(i)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，② から　　$x=\dfrac{{}^{カ}3}{{}^{キ}5}$

③ から　　$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{5}$ を代入して　　$y=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケコ}10}$

このとき，① から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-\dfrac{9}{25}-\dfrac{9}{100}=\dfrac{55}{100}$

よって，① を満たす実数 $z$ は $z=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{10}$ のちょうど 2 つある。　(サ ②)

したがって，△ABC が正三角形となる $S$ 上の点 C はちょうど 2 つある。

(ii)　$a=-\dfrac{3}{5}$ のとき，② から　　$x=-\dfrac{3}{5}$

③ から　　$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=-\dfrac{3}{5}$

$x=-\dfrac{3}{5}$ を代入して　　$y=-\dfrac{6}{5}$

このとき，① から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-\dfrac{9}{25}-\dfrac{36}{25}=-\dfrac{4}{5}$

$z^2\geqq 0$ より，これを満たす実数 $z$ は存在しないから，△ABC が正三角形となる $S$ 上

の点 C はない。 (シ ⓪)

(3) ② を ③ に代入して $a^2+\sqrt{1-a^2}\,y=a$

$$\sqrt{1-a^2}\,y=a(1-a)$$

$-1<a<1$ より，$\sqrt{1-a^2}\neq 0$ であるから $y=\dfrac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$

このとき，① から $z^2=1-x^2-y^2=1-a^2-\dfrac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}$

$$=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}=\frac{(1-a)(1+a)^2-a^2(1-a)}{1+a}$$

$$=\frac{\{(1+a)^2-a^2\}(1-a)}{1+a}=\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}$$ (ス ③)

$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ である。

逆に，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ のとき，実数 $z$ が存在するから，①，②，③ を満たす実数 $x$，$y$，$z$ があることがわかる。

$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ より $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$

$-1<a<1$ と合わせて $-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$

以上のことから，$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ は △ABC が正三角形となる $S$ 上の点 C があるための必要十分条件である。 (セ ④)

参考 ((1) の (*) の証明)

① が成立するとき，点 C は球面 $S$ 上に存在する。

また，② が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から $\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\angle\mathrm{AOB}$

よって，△OAC，△OAB で余弦定理と，OA＝OB＝OC から

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\angle\mathrm{AOC}\\&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}\\&=\mathrm{AB}^2\end{aligned}$$

すなわち，AC＝AB が成り立つから，OA は共通，OB＝OC と合わせて

△OAC≡△OAB

したがって AC＝AB

さらに，③ が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，② のときと同様にして

△OBC≡△OAB

したがって BC＝AB

ゆえに AB＝BC＝AC

以上より，実数 $x$，$y$，$z$ が ①，②，③ を満たすとき，点 C は $S$ 上の点であり，△ABC は正三角形である。

## 3

解説

(1) $L_2=5$ となるのは，$(X_1,\ X_2)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$ のときであるから，その確率は $\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

$G_2=5$ となるのは，$(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$ のときであるから，その確率は　$\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

(2)　$L_n$ が素数でないという事象の余事象，すなわち，$L_n$ が素数となる確率を考える。
$L_n$ が素数となるのは次の 3 つの場合がある。

$$L_n=2,\ L_n=3,\ L_n=5$$

$L_n=2$ となるのは，出る目が 1，2 のみで，かつ 2 の目が少なくとも 1 回出るときであるから，その確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{2^n-1}{6^n}$

$L_n=3$ となるのは，出る目が 1，3 のみで，かつ 3 の目が少なくとも 1 回出るときである。
また，$L_n=5$ となるのは，出る目が 1，5 のみで，かつ 5 の目が少なくとも 1 回出るときである。
よって，$L_n=3$ となる確率，$L_n=5$ となる確率はともに　$\dfrac{2^n-1}{6^n}$
したがって，求める確率は

$$1-\frac{2^n-1}{6^n}\times 3=\frac{6^n-3\cdot 2^n+3}{6^n}$$

(3)　$G_n$ が素数でないという事象の余事象，すなわち，$G_n$ が素数となる確率を考える。
$G_n$ が素数となるのは次の 3 つの場合がある。

$$G_n=2,\ G_n=3,\ G_n=5$$

[1]　$G_n=2$ の場合
出る目が 2，4，6 のみで，かつ「すべての目が 4 またはすべての目が 6」でない場合であるから，[1] の確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\times 2=\dfrac{3^n-2}{6^n}$

[2]　$G_n=3$ の場合
出る目が 3，6 のみで，かつ 3 の目が少なくとも 1 回出る場合であるから，[2] の確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{2^n-1}{6^n}$

[3]　$G_n=5$ の場合
出る目が 5 のみの場合であるから，[3] の確率は　$\dfrac{1}{6^n}$

[1] ～ [3] から，$G_n$ が素数となる確率は

$$\frac{3^n-2}{6^n}+\frac{2^n-1}{6^n}+\frac{1}{6^n}=\frac{3^n+2^n-2}{6^n}$$

したがって，$G_n$ が素数でない確率は

$$1-\frac{3^n+2^n-2}{6^n}=\frac{6^n-3^n-2^n+2}{6^n}$$

## 4

解説

2 数 $A$，$B$ の最大公約数を $(A,\ B)$ で表す。

$$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6$$

であるから，ユークリッドの互除法により　$(n^4+2,\ n^2+2)=(n^2+2,\ 6)$
よって，$n^4+2$ と $n^2+2$ の最大公約数 $g$ は 6 の正の約数であり，

$$n^2+2=ga,\ 6=gb\quad (a,\ b \text{ は互いに素である自然数})$$

とおける。

このとき　$n^6+2=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6=g\{a(n^4-2n^2+4)-b\}$

となり，$g$ は $n^6+2$ の約数でもあり　$A_n=g$

すなわち，$A_n$ は $n^2+2$ と 6 の最大公約数である。

また，すべての自然数 $n$ は，$k$ を自然数として

$$6k,\ 6k-1,\ 6k-2,\ 6k-3,\ 6k-4,\ 6k-5$$

のいずれかの形で表され，$n=6k-l$ について

$$n^2+2=(6k-l)^2+2=6(6k^2-2kl)+l^2+2 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　$n=6k$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(0^2+2,\ 6)=(2,\ 6)=2$

[2]　$n=6k-1$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(1^2+2,\ 6)=(3,\ 6)=3$

[3]　$n=6k-2$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(2^2+2,\ 6)=(6,\ 6)=6$

[4]　$n=6k-3$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(3^2+2,\ 6)=(11,\ 6)=1$

[5]　$n=6k-4$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(4^2+2,\ 6)=(18,\ 6)=6$

[6]　$n=6k-5$ のとき

①により　$(n^2+2,\ 6)=(5^2+2,\ 6)=(27,\ 6)=3$

以上から，3 つの整数 $n^2+2$，$n^4+2$，$n^6+2$ の最大公約数 $A_n$ は

$$A_n=\begin{cases} 2 & (n=6k\ \text{のとき}) \\ 3 & (n=6k-1,\ 6k-5\ \text{のとき}) \\ 6 & (n=6k-2,\ 6k-4\ \text{のとき}) \\ 1 & (n=6k-3\ \text{のとき}) \end{cases} \quad (k\ \text{は自然数})$$

$\boxed{5}$

（解説）

線分 PQ の方程式は　$y-t=\dfrac{0-t}{\dfrac{1}{t}-0}x$　$(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

よって　$y=-t^2x+t$　$(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

$t$ について整理すると　$xt^2-t+y=0$　…… ①

点 $(x,\ y)$ が線分 PQ が通過する部分に含まれる条件は，$t$ の方程式 ① が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に実数解をもつことである。

[1]　$x=0$ のとき

方程式 ① は　$-t+y=0$

よって　$t=y$

① が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に実数解をもつための条件は

$$1\leqq y\leqq 2$$

[2]　$x\neq 0$ すなわち $x>0$ のとき

$t$ の 2 次方程式が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつための条件を考える。

$f(t)=xt^2-t+y$ とおくと　$f(t)=x\left(t-\dfrac{1}{2x}\right)^2-\dfrac{1}{4x}+y$

(i)　$f(1)\cdot f(2)\leqq 0$ のとき

$f(1)=x-1+y$，$f(2)=4x-2+y$ より

$$(x+y-1)(4x+y-2)\leqq 0$$

すなわち

$\begin{cases}x+y-1\geqq 0\\4x+y-2\leqq 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x+y-1\leqq 0\\4x+y-2\geqq 0\end{cases}$

このとき，$f(t)=0$ は $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつ。

(ii)　$f(1)\cdot f(2)>0$ のとき

このとき，$f(t)=0$ が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつための条件は

(ア)　$1<\dfrac{1}{2x}<2$

(イ)　$-\dfrac{1}{4x}+y\leqq 0$

(ウ)　$f(1)>0$

(エ)　$f(2)>0$

(ア)　$1<\dfrac{1}{2x}<2$ より　$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$

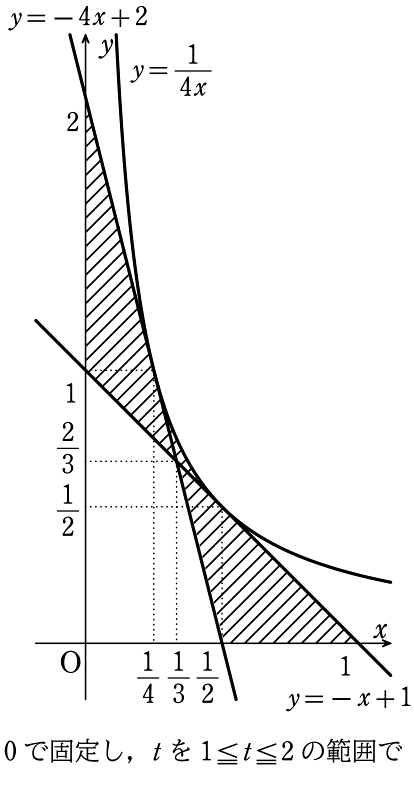
(イ)　$-\dfrac{1}{4x}+y\leqq 0$ より　$y\leqq\dfrac{1}{4x}$

(ウ)　$f(1)>0$ より　$x+y-1>0$

(エ)　$f(2)>0$ より　$4x+y-2>0$

[1]，[2] と $y\geqq 0$ より，線分 PQ が通過する部分は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は含む。




（別解）　$y=-xt^2+t$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ において，$x$ を $x\geqq 0$ で固定し，$t$ を $1\leqq t\leqq 2$ の範囲で動かしたときの $y$ の値域を求める。

$g(t)=-xt^2+t$ とおく。

[1]　$x=0$ のとき

$g(t)=t$ であるから，$1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$g(1) \leqq y \leqq g(2)$

よって　$1 \leqq y \leqq 2$

[2]　$x>0$ のとき

$$g(t)=-x\left(t-\frac{1}{2x}\right)^2+\frac{1}{4x}$$

(i)　$0<\frac{1}{2x} \leqq 1$ すなわち $\frac{1}{2} \leqq x$ のとき

$g(2) \leqq y \leqq g(1)$ より　$-4x+2 \leqq y \leqq -x+1$

(ii)　$1<\frac{1}{2x} \leqq \frac{3}{2}$ すなわち $\frac{1}{3} \leqq x<\frac{1}{2}$ のとき

$g(2) \leqq y \leqq g\left(\frac{1}{2x}\right)$ より　$-4x+2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$

(iii)　$\frac{3}{2}<\frac{1}{2x} \leqq 2$ すなわち $\frac{1}{4} \leqq x<\frac{1}{3}$ のとき

$g(1) \leqq y \leqq g\left(\frac{1}{2x}\right)$ より

$$-x+1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x}$$

(iv)　$2<\frac{1}{2x}$ すなわち $0<x<\frac{1}{4}$ のとき

$g(1) \leqq y \leqq g(2)$ より

$$-x+1 \leqq y \leqq -4x+2$$

以上より，$x$，$y$ が満たす条件は

$y \geqq 0$

かつ
$$\begin{cases} 1 \leqq y \leqq 2 & (x=0) \\ -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 & \left(0<x<\frac{1}{4}\right) \\ -x+1 \leqq y \leqq \frac{1}{4x} & \left(\frac{1}{4} \leqq x<\frac{1}{3}\right) \\ -4x+2 \leqq y \leqq \frac{1}{4x} & \left(\frac{1}{3} \leqq x<\frac{1}{2}\right) \\ -4x+2 \leqq y \leqq -x+1 & \left(\frac{1}{2} \leqq x\right) \end{cases}$$