1 [2016 センター]

解答　(1) ⑤　(2) ④

(1)　小物体をはなした直後と水平面上を運動している瞬間の力学的エネルギーは保存するので，

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{ゆえに} \quad v=\sqrt{\frac{k}{m}}\,x$$

以上より，正しいものは ⑤。

(2)　水平面上を運動している瞬間と点 A での力学的エネルギーは保存するので，重力による位置エネルギーの基準面を水平面とすると

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh \qquad \text{ゆえに} \quad h=\frac{v^2}{2g}$$

以上より，正しいものは ④。

2 [2015 センター]

解答　(1) ②　(2) ⑤

(1)　フックの法則から，

$$F=kx \qquad \text{ゆえに} \quad x=\frac{F}{k}$$

以上より，正しいものは ②。

参考　図のようにばねの端 A を壁に固定して，他端 B を右向きに大きさ F の力で引くとき，ばねの端 A には壁から左向きに大きさ F の力がはたらき，ばねにはたらく力がつりあって静止している。フックの法則のばねの伸び x は，このようにばねの両端に大きさ F の力がはたらいているとき

$$F=kx$$

の関係があることを示している。

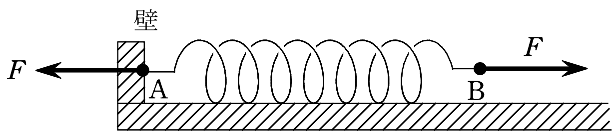


図 a

(2)　両端に加えた力がした仕事の和 W が，弾性エネルギーの増加になる。したがって，ばねが自然の長さの状態から，長さ x だけ伸びた状態になるまでに両端に加えた力がした仕事の和 W は

$$W=\frac{1}{2}kx^2-0=\frac{1}{2}kx^2$$

以上より，正しいものは ⑤。

別解　ばねの端 A，B に同じ大きさの力を加えながらばねを長さ x だけ引き伸ばすと，ばねの中心 O は移動せずに A，B が $\frac{x}{2}$ だけ移動する。ばね定数が k の AB 部分のばねの長さを l とすると，AO 部分のばねの長さは $\frac{l}{2}$ なので，そのばね定数は $2k$ となる。したがって，A に加えた力がした仕事は，ばね定数 $2k$ のばねを長さ $\frac{x}{2}$ だけ伸ばすときの仕事なので，

$$W_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{kx^2}{4}$$

同様に，B に加えた力がした仕事は

$$W_{\mathrm{B}}=\frac{kx^2}{4}$$

よって，両端に加えた力がした仕事の和は

$$W=W_{\mathrm{A}}+W_{\mathrm{B}}=\frac{kx^2}{4}+\frac{kx^2}{4}=\frac{kx^2}{2}$$

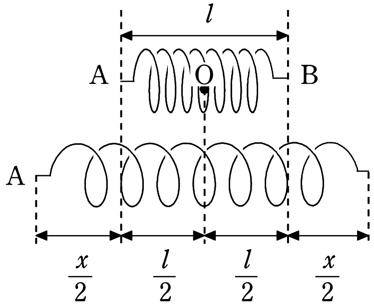


図 b

3 [2015 センター]

解答　(1) ①　(2) ⑥

(1)　図 a のように，上のばねは $l-h$ だけ伸び，下のばねは $l-h$ だけ縮んでいる。よって，小球にはたらく力は，大きさ

$$f_1=k(l-h)$$

の上のばねが上向きに引く力，大きさ

$$f_2=k(l-h)$$

の下のばねが上向きに押す力と大きさ mg の下向きの重力である。したがって，小球にはたらく力のつりあいから

$$k(l-h)+k(l-h)-mg=0$$

であるので

$$h=l-\frac{mg}{2k}$$

以上より，正しいものは ① 。

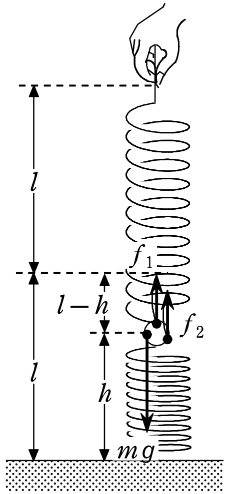


図 a

(2)　小球の高さが l になったとき，ばねの長さの合計が y なので，図 b のように，上のばねは $y-2l$ だけ伸び，下のばねは自然の長さとなっている。よって，小球にはたらく力は，大きさ

$$f_1=k(y-2l)$$

の上のばねが上向きに引く力と大きさ mg の下向きの重力である。したがって，小球にはたらく力のつりあいから

$$k(y-2l)-mg=0$$

であるので

$$y=\frac{mg}{k}+2l$$

また，手がした仕事 W は，ばねとおもりからなる系の力学的エネルギーの変化であり，図 a と図 b の状態の小球の重力による位置エネルギーの変化 $\varDelta U_{\text{重力}}$ と弾性力による位置エネルギー (弾性エネルギー)の変化 $\varDelta U_{\text{ばね}}$ の和に等しい。よって

$$W=\varDelta U_{\text{重力}}+\varDelta U_{\text{ばね}}$$

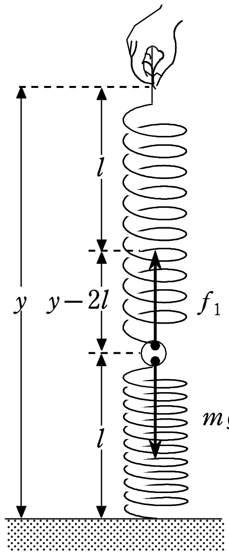


図 b

$$=mg(l-h)+\left\{\frac{1}{2}k(y-2l)^2-\frac{1}{2}k(l-h)^2\times 2\right\}$$

$$=mg(l-h)+\frac{1}{2}k(y-2l)^2-k(l-h)^2$$

以上より，正しいものは ⑥ 。

$\boxed{4}$ ［1996 センター］

解答　(1)　③　　(2)　③　　(3)　④　　(4)　②　　(5)　③

［A］ (1)　鉛直方向の運動で，時刻 t_0 で速度が 0 となるから

$$0=v_1-gt_0 \qquad \text{ゆえに} \quad v_1=gt_0$$

v_1 は $\vec{v}$ の鉛直成分であるから $gt_0=v\sin\theta$

水平方向の運動から　$l=v\cos\theta\cdot t_0$

2 式の比をとって

$$\frac{gt_0}{l}=\frac{\tan\theta}{t_0} \qquad \text{ゆえに} \quad \tan\theta=\frac{1}{l}g{t_0}^2$$

(2)　ボールの鉛直方向の運動から

$$0^2-(gt_0)^2=-2gh_0 \qquad \text{ゆえに} \quad t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

［B］ (3)　ボールの時刻 t における高さ h を表す式は

$$h=v_1t-\frac{1}{2}gt^2=gt_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

キーパーの初速度 (時刻 t_1 における速度) を u_1，時刻 t における速度を u，高さを h とすると

$$\begin{cases} u^2-{u_1}^2=-2g(h-h_1) & \cdots\cdots① \\ 0^2-{u_1}^2=-2g(h_0-h_1) & \cdots\cdots② \\ 0=u-g(t_0-t) & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

① ②から u_1 を消去すると

$$u^2=2g(h_0-h) \qquad \cdots\cdots④$$

③から　$u^2=g^2(t_0-t)^2$ 　　……⑤

④ ⑤ から　$2g(h_0-h)=g^2(t_0-t)^2$

ゆえに　$h=h_0-\dfrac{1}{2}g(t_0-t)^2$

(2)から　$h_0=\dfrac{1}{2}gt_0{}^2$

ゆえに　$h=\dfrac{1}{2}gt_0{}^2-\dfrac{1}{2}g(t_0-t)^2=gt_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

ボールと手の運動を表す式が等しいから，その h-t グラフも一致する。ゆえに ②

(4)　グラフの式で $t=t_1$ のとき $h=\dfrac{3}{4}h_0$ とおくと

$$\frac{3}{4}h_0=gt_0t_1-\frac{1}{2}gt_1{}^2$$

整頓して　$t_1{}^2-2t_0t_1+\dfrac{3h_0}{2g}=0$

ゆえに　$t_1=t_0\pm\sqrt{t_0{}^2-\dfrac{3h_0}{2g}}$

$t_1<t_0$ であるから正の符号は適当でない。

ゆえに　$t_1=\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}-\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}-\dfrac{3h_0}{2g}}=\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{h_0}}{\boldsymbol{2g}}}$

5

解答　(1)　$v_x=v_0\cos\theta-g\sin\theta\cdot t$〔m/s〕

$v_y=v_0\sin\theta-g\cos\theta\cdot t$〔m/s〕

(2)　$\dfrac{2v_0}{g}\tan\theta$〔s〕　　(3)　$\dfrac{2v_0{}^2}{g}\sin\theta(1-\tan^2\theta)$〔m〕

(4)　$x=\dfrac{v_0{}^2\sin\theta}{2g}(2-\tan^2\theta)$〔m〕

$y=\dfrac{v_0{}^2}{2g}\sin\theta\tan\theta$〔m〕

斜面上方を x 軸，斜面垂直上向きに y 軸をとって運動を調べる場合は，重力加速度も与えられた軸の方向に分解して考える必要がある。この問題では次のようになる。

x 軸方向　加速度　$a_x=-g\sin\theta$　〔注：等速運動ではない〕
y 軸方向　加速度　$a_y=-g\cos\theta$

(1)　斜面が水平面となす角が θ だから，重力加速度の x，y 成分は

$a_x=-g\sin\theta$，$a_y=-g\cos\theta$　となる。

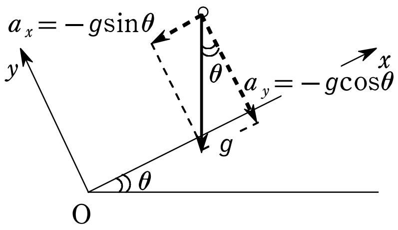
また，斜面（x 軸方向）に対して角度 θ で投げ上げたから，初速度の x，y 成分は

$v_{0x}=v_0\cos\theta$，$v_{0y}=v_0\sin\theta$　となる。

等加速度運動の式　$v=v_0+at$　より

$v_x=v_{0x}+a_xt=\boldsymbol{v_0\cos\theta-g\sin\theta\cdot t}$〔m/s〕

$v_y=v_{0y}+a_yt=\boldsymbol{v_0\sin\theta-g\cos\theta\cdot t}$〔m/s〕

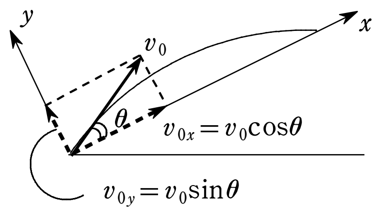


(2)　斜面に当たるとき，小球の y 座標が 0 になればよいから，等加速度運動の式

$y=v_{0y}t+\dfrac{1}{2}a_yt^2$　より

$$y=v_0\sin\theta\cdot T-\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot T^2=0$$

$$\left(v_0\sin\theta-\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot T\right)T=0$$



$T>0$ より　$T=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{2v_0}{g}\tan\theta}$〔s〕※A←

(3)　$x=v_{0x}T+\dfrac{1}{2}a_xT^2$ より ※B←

$$l=v_0\cos\theta\cdot\frac{2v_0}{g}\tan\theta-\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot\left(\frac{2v_0}{g}\tan\theta\right)^2$$

$$=\frac{2v_0{}^2}{g}\sin\theta-\frac{2v_0{}^2}{g}\sin\theta\tan^2\theta$$

$$=\boldsymbol{\frac{2v_0{}^2}{g}\sin\theta(1-\tan^2\theta)}\text{〔m〕}$$

(4)　(2) の別解から，y 座標の最大値までの時間 t_0 は　$t_0=\dfrac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}$

求める x 座標は　$x=v_{0x}t_0+\dfrac{1}{2}a_xt_0{}^2$　より

$$x=v_0\cos\theta\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}-\frac{1}{2}g\sin\theta\left(\frac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{v_0{}^2}{g}\sin\theta-\frac{v_0{}^2\sin\theta}{2g}\tan^2\theta=\frac{v_0{}^2\sin\theta}{2g}(2-\tan^2\theta)\ \text{〔m〕}$$

また，求める y 座標は　$y=v_{0y}t_0+\frac{1}{2}a_yt_0{}^2$ より

$$y=v_0\sin\theta\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}-\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot\left(\frac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{v_0{}^2\sin\theta}{g}\tan\theta-\frac{v_0{}^2\sin\theta}{2g}\tan\theta=\frac{v_0{}^2}{2g}\sin\theta\tan\theta\ \text{〔m〕}$$ ※C←

←※A　別解　y 座標の最大値までの時間を t_0 とすると，最大値では $v_y=0$ であるから，

$v_y=v_{0y}+a_yt$ より

$$0=v_0\sin\theta-g\cos\theta\cdot t_0$$

よって　$t_0=\frac{v_0\sin\theta}{g\cos\theta}$

斜面に当たるまでの時間 T は t_0 の 2 倍だから

$$T=2t_0=\frac{2v_0\tan\theta}{g}\ \text{〔s〕}$$

←※B　x 軸方向の運動は等速運動ではない。

←※C　別解　$v^2-v_0{}^2=2ax$ より

$$0^2-(v_0\sin\theta)^2=-2g\cos\theta\cdot y$$

よって

$$y=\frac{v_0{}^2}{2g}\sin\theta\tan\theta\ \text{〔m〕}$$

6

解答　(1)　(ア)　Mg　　(イ)　$\frac{Mg}{2}$　　(ウ)　$\frac{1}{2}$

(2)　(a)　⑤　　(エ)　mg　　(オ)　$\frac{3M+4m}{6(M+m)}$

(3)　(b)　④　　(カ)　$\frac{mg}{\sqrt{2}}$　　(c)　⑥　　(キ)　$\frac{mg}{\sqrt{2}}$　　(ク)　$\frac{3M+m}{3(2M+m)}$

ヒント　(イ)　『力のモーメントのつりあい』$\Longrightarrow$ 重力 Mg を棒に直交する成分と平行な成分に分解する

(ウ)　『棒がすべり落ちないための条件』$\Longrightarrow$
棒にはたらく摩擦力 $\leqq$ 最大摩擦力 μN

(エ)　『粘土粒が棒上に固定されている』$\Longrightarrow$ 粘土粒には垂直抗力と摩擦力がはたらいており，それらの合力が棒からの抗力になる

(カ)　『小球の動きは棒にそった等加速度運動』$\Longrightarrow$ 小球にはたらく棒に垂直な力の成分はつりあう

(1)　点 P で棒にはたらく垂直抗力を N_1，摩擦力を f_1，壁と接する点を Q とし，Q で受ける壁からの垂直抗力を R_1 とすると，棒にはたらく力は図 a となる。

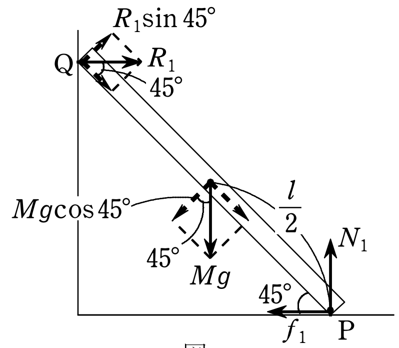


図 a

(ア)　鉛直方向の力のつりあいより

$N_1=Mg$　……〔a〕

(イ)　点 P のまわりの力のモーメントのつりあいの式は，「$F_\perp\times l$」より，回転軸 P からの距離と直交する成分を考えると (図 a)

$$Mg\cos45°\times\frac{l}{2}=R_1\sin45°\times l$$ ※A←

よって　$Mg\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{l}{2}=R_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot l$　　ゆえに　$R_1=\frac{Mg}{2}$　……〔b〕

(ウ)　水平方向の力のつりあいと〔b〕式より　$R_1=f_1$　よって　$f_1=\frac{Mg}{2}$　……〔c〕

棒がすべり落ちないためには，摩擦力 f_1 が最大摩擦力の大きさ「$F_0=\mu N$」以下であればよいので　$f_1\leqq\mu N_1$　……〔d〕

〔a〕，〔c〕，〔d〕式より

$$\frac{Mg}{2}\leqq\mu Mg\quad ゆえに\quad \mu\geqq\frac{1}{2}$$

(2)(a)(エ) 粘土粒にはたらく力は図 b のようになり，棒から粘土粒にはたらく抗力(垂直抗力と摩擦力の合力)は重力 mg とつりあう。この抗力の反作用が図 c のように棒にはたらくので，棒が粘土粒から受ける力の向きは鉛直下向き(⑤ ……(a))で大きさは $\boldsymbol{mg}$ ……(エ)

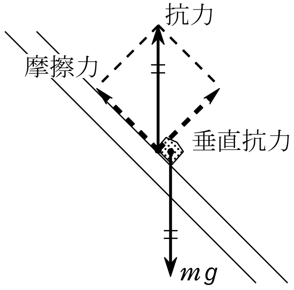


図 b

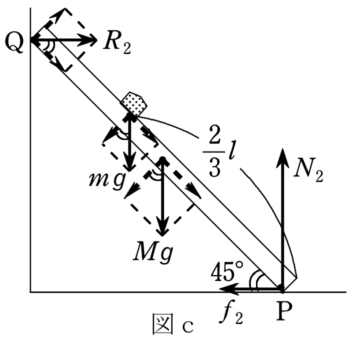


図 c

(オ) (1)と同様に，棒にはたらく力を図 c のように定義する。水平方向の力のつりあいより

$R_2 = f_2$ ……[e]

また，鉛直方向の力のつりあいより

$N_2 = Mg + mg$

よって $N_2 = (M+m)g$ ……[f]

点 P のまわりの力のモーメントのつりあいより，「$F_{\perp} \times l$」を用いて

$$Mg\cos 45° \times \frac{l}{2} + mg\cos 45° \times \frac{2}{3}l = R_2 \sin 45° \times l$$

すなわち $Mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{l}{2} + mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}l = R_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times l$

よって $R_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{2mg}{3} = \frac{3M+4m}{6}g$ ……[g]

[e]，[g]式より，$f_2 = R_2 = \frac{3M+4m}{6}g$ ……[h]

棒がすべり落ちないための条件は $f_2 \leqq \mu N_2$ であるので，[f]，[h]式より

$$\frac{3M+4m}{6}g \leqq \mu(M+m)g$$

ゆえに $\mu \geqq \boldsymbol{\frac{3M+4m}{6(M+m)}}$

(3)(b)(カ) 小球にはたらく力は図 d のようになり，棒からの垂直抗力と重力の棒と直交する成分がつりあうので，重力の棒と平行な成分が合力となる。よって合力の向きは棒と平行に右下 45° の向き(④ ……(b))で，大きさは

$$mg\sin 45° = \boldsymbol{\frac{mg}{\sqrt{2}}} \quad \text{……(カ)}$$

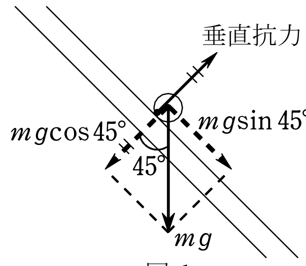


図 d

(c)(キ) 棒は図 e のように小球が受ける垂直抗力の反作用を受けるので，棒と垂直に左下 45° の向き(⑥ ……(c))で，大きさは

$$mg\cos 45° = \boldsymbol{\frac{mg}{\sqrt{2}}} \quad \text{……(キ)}$$

※B←

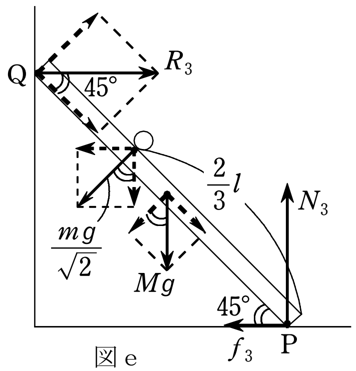


図 e

(ク) (1)と同様に，棒にはたらく力を図 e のように定義する。水平方向の力のつりあいより

$R_3 = f_3 + mg\cos 45° \cdot \sin 45°$

よって $R_3 = f_3 + mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに $f_3 = R_3 - \frac{mg}{2}$ ……[i]

また，鉛直方向の力のつりあいより

$N_3 = Mg + mg\cos 45° \cdot \cos 45°$

よって $N_3 = Mg + mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = Mg + \frac{mg}{2} = \frac{2M+m}{2}g$ ……[j]

点 P のまわりの力のモーメントのつりあいより，「$F_{\perp} \times l$」を用いて

$$Mg\cos 45° \times \frac{l}{2} + mg\cos 45° \times \frac{2}{3}l = R_3 \sin 45° \times l$$

よって $Mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{l}{2} + mg \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}l = R_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times l$

ゆえに $R_3 = \frac{Mg}{2} + \frac{2mg}{3} = \frac{3M+4m}{6}g$ ……[k]

[i]，[k]式より $f_3 = R_3 - \frac{mg}{2} = \frac{3M+4m}{6}g - \frac{mg}{2} = \frac{3M+m}{6}g$ ……[l]

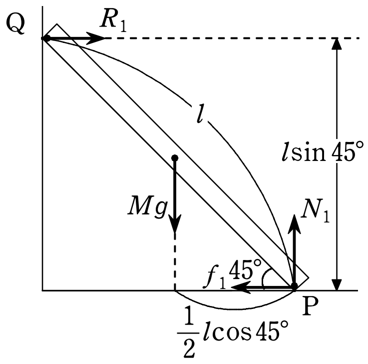
棒がすべり落ちないための条件は $f_3 \leqq \mu N_3$ であるので，〔j〕,〔l〕式より

$$\frac{3M+m}{6}g \leqq \mu \cdot \frac{2M+m}{2}g$$

したがって　$\boldsymbol{\mu \geqq \frac{3M+m}{3(2M+m)}}$

←※A　「$F \times l_{\perp}$」で考えると(右図)

$$Mg \times \frac{l}{2}\cos 45° = R_1 \times l \sin 45°$$



←※B　物体が斜めの棒上に固定された場合((2)の場合)と，摩擦のない棒上を動く場合((3)の場合)とでは異なる結果となる。