1 [2015 センター]

解答　(1)　④　　(2)　②

(1)　物体にはたらく摩擦力の大きさを F とする。図 a（ i ）のように，水平左向きに大きさ f の力を物体に加えると，平板と物体の面がずれるのを妨げる静止摩擦力が右向きにはたらいて物体は静止したままである。
摩擦力の大きさ F は物体にはたらく力のつりあいから

$$F-f=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad F=f$$

物体が静止しているときは F と f は等しく，図 a（ii）のように，f の増加にともない F も増加する。静止摩擦力の大きさには最大値 F_0 がある。図 a（iii）のように，$f=f_0$ となって，$F=F_0$ となるまでは物体は静止しているが，f が f_0 を超えると $f>F$ となり物体は動き出す。
物体が運動すると，面がずれるのを妨げる向きに動摩擦力がはたらく。動摩擦力の大きさ F' は，物体の速さによらず一定であり，一般に，$F'<F_0$ である。したがって，$f>f_0$ では $F=F'<F_0$ の一定の大きさの摩擦力がはたらく。
以上より，最も適当なものは ④。

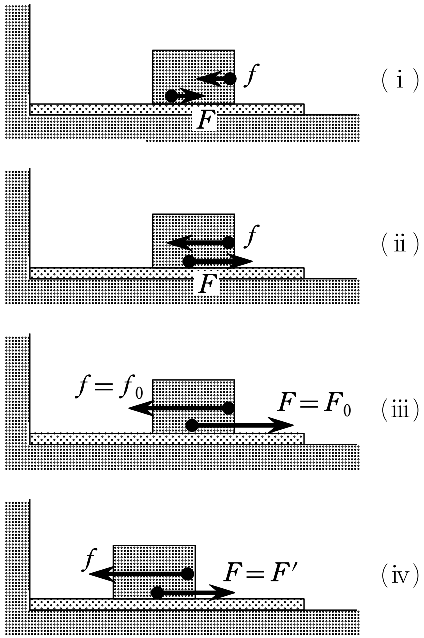


図 a

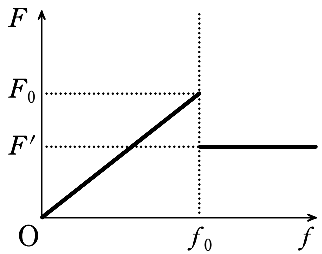


図 b

(2)　傾斜角が 30° となって物体がすべり出す直前にはたらく摩擦力は最大摩擦力 F_0 である。このとき，物体にはたらく力は，鉛直下向きに大きさ mg の重力，面に垂直な向きに垂直抗力，面に平行な向きに大きさ F_0 の最大摩擦力である。垂直抗力の大きさを N とすると，面に平行な方向の力のつりあいから

$$F_0-\frac{1}{2}mg=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad F_0=\frac{1}{2}mg \quad \cdots\cdots ①$$

面に垂直な方向の力のつりあいから

$$N-\frac{\sqrt{3}}{2}mg=0$$

ゆえに　$N=\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg$　$\cdots\cdots$ ②

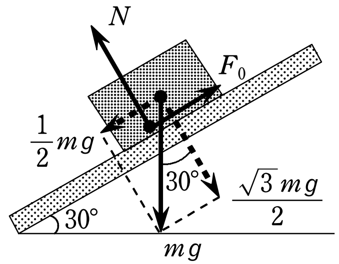


図 c

また，最大摩擦力の大きさは

$$F_0=\mu N \quad \cdots\cdots ③$$

①，② を ③ に代入して

$$\frac{1}{2}mg=\mu\frac{\sqrt{3}}{2}mg \qquad \text{ゆえに} \qquad \mu=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

以上より，最も適当なものは ②。

2 [2014 センター]

解答　(1)　④　　(2)　②

(1)　A の上面が固定台に達するまでは，A と C は一体となって運動するので，A と C 全体にはたらく力は大きさ $(M+m)g$ の重力と大きさ T の糸が引く力である。
また，物体 B にはたらく力は大きさ Mg の重力と大きさ T の糸が引く力である。糸が A を引く力と B を引く力の大きさ T は等しい。したがって，A と C，B の加速度の大きさを a とすると，それぞれの運動方程式は

A と C : $(M+m)a=(M+m)g-T$　$\cdots\cdots$ ①

B : $Ma=T-Mg$　$\cdots\cdots$ ②

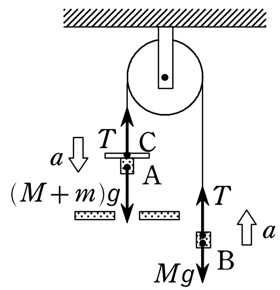


図 a

よって，①+② より

$$(M+m)a+Ma=(M+m)g-Mg$$

ゆえに　$a=\dfrac{m}{2M+m}g$

以上より，正しいものは ④。

(2)　(1) から，$t=0$ から $t=t_0$ の間の A の運動は等加速度直線運動である。また，時刻 $t=t_0$ に A の上面が固定台に達した後は，C は取り除かれるので，A と B のみが運動する。A，B にはたらく力は大きさ Mg の重力と大きさ T の糸が引く力である。したがって，A，B の加速度の大きさを a とすると，それぞれの運動方程式は

A : $Ma=Mg-T$　……①

B : $Ma=T-Mg$　……②

よって，①＋② より　$a=0$

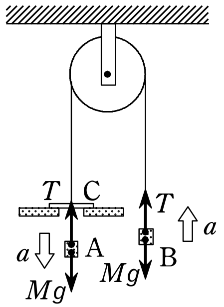


図 b

したがって，$t=t_0$ からの Aの運動は等速直線運動であることがわかる。速さと時刻の関係を表すグラフの傾きは加速度 a なので，そのグラフは 図 c のようになる。

以上より，最も適当なものは ②。

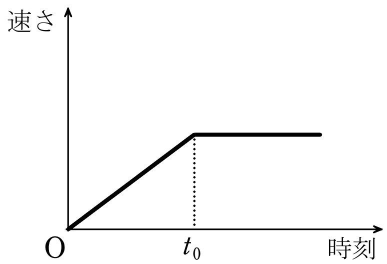


図 c

3 [2012 センター]

解答　(1)　$\boxed{1}$　⑥　　(2)　$\boxed{2}$　①　　(3)　$\boxed{3}$　③　　$\boxed{4}$　④

(1)　小物体の質量を m とする。点 A を通過するときの小物体の速さを v とすると，点 P と点 A での小物体の力学的エネルギー保存則から

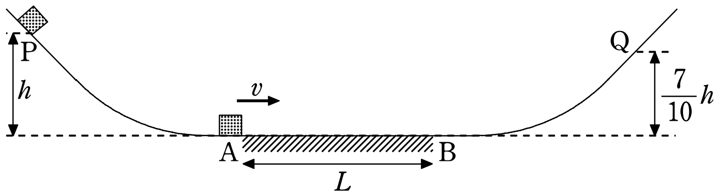
$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

よって

$$v=\sqrt{2gh}$$

以上より，

正しいものは　⑥。



図A

(2)　点 Q と点 P での小物体の力学的エネルギーの変化は，AB 間で動摩擦力が小物体にした仕事 W に等しい。小物体にはたらく垂直抗力の大きさを N，動摩擦力の大きさを f とすると，鉛直方向の力のつりあいから

$$N-mg=0$$

よって，動摩擦力は

$$f=\mu' N=\mu' mg$$

したがって，動摩擦力がした仕事は

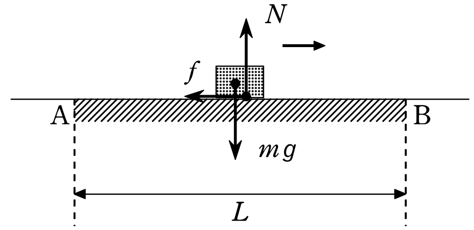
$$W=-fL=-\mu' mgL$$

なので

$$mg\frac{7}{10}h-mgh=-\mu' mgL$$

よって　$\mu'=\dfrac{3h}{10L}$

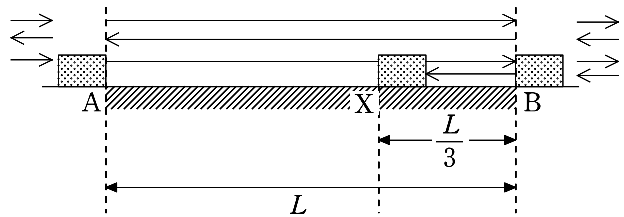
以上より，正しいものは　①。



図B

(3)　AB 間を通過するときにはたらく動摩擦力 f は運動の向きとつねに逆向きなので，動摩擦力が小物体にする仕事はつねに負である。小物体が静止するまでに AB 間を通過した距離の合計を x とすると，点 X と点 P での小物体の力学的エネルギーの変化は，AB 間で動摩擦力 f が小物体にした仕事に等しいので，(2) より $\mu'=\dfrac{3h}{10L}$ であるから

$$0-mgh=-\frac{3h}{10L}mgx$$



図C

よって　$x=\dfrac{10}{3}L=3L+\dfrac{L}{3}$

したがって，図 C から分かるように，点 A を 3 回通過し

$$AX=L-\frac{L}{3}=\frac{2}{3}L$$

の点 X で静止する。

以上より，正しいものは $\boxed{3}$ ③，$\boxed{4}$ ④。

4 [2013 センター]

解答　(1)　④　　(2)　③　　(3)　①

(1)　A の位置を原点として斜面にそって下向きに x 軸をとる。物体の x 軸方向の加速度を a とすると，その運動方程式

$$ma=mg\sin\theta$$

から

$$a=g\sin\theta$$

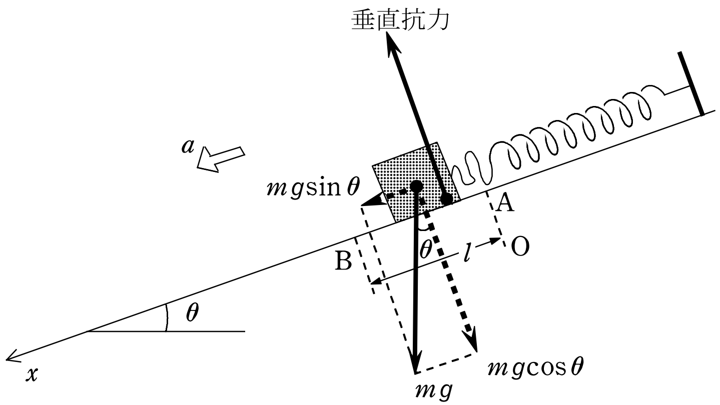


図 a

となる。よって，点 A から点 B まで距離 l だけ進むのにかかる時間を t とすると

$$l=\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 \qquad よって \quad t=\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}}$$

となる。

以上より，正しいものは ④。

(2)　ばねが X だけ伸びているときに，物体にはたらく x 軸方向の力は，図 b のように重力の x 軸方向の成分 $mg\sin\theta$ とばねにつけた糸が引く大きさ kX の力である。ばねの伸びが小さいときは

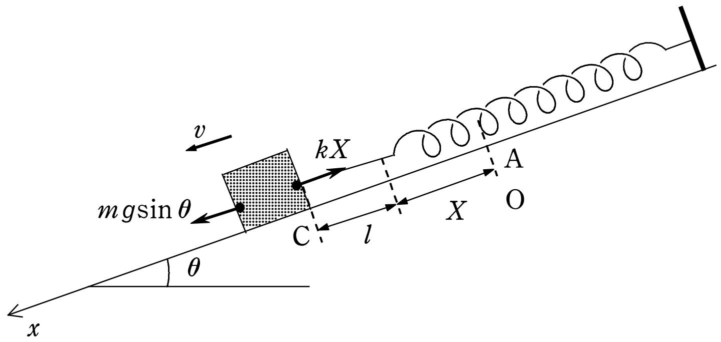


図 b

$$mg\sin\theta>kX$$

なので，それらの合力は x 軸の正の向きとなり加速していく。しかし，

$$mg\sin\theta-kX=0$$

となった後は，$mg\sin\theta<kX$ となりそれらの合力は x 軸の負の向きになって減速していく。よって，速さが最大の点 C では

$$mg\sin\theta-kX=0 \qquad よって \quad X=\frac{mg}{k}\sin\theta$$

である。したがって

$$\mathrm{AC}=l+X=l+\frac{mg}{k}\sin\theta$$

となる。

以上より，正しいものは ③。

(3)　斜面はなめらかなので，物体が斜面をすべり降りるときに力学的エネルギーが保存する。したがって，物体の力学的エネルギーを E，重力による位置エネルギーを $U_{重}$，弾性力による位置エネルギーを $U_{弾}$，物体の速さを v とすると

$$E=\frac{1}{2}mv^2+U_{重}+U_{弾}=一定$$

より，位置エネルギーの和は

$$U=U_{重}+U_{弾}=E-\frac{1}{2}mv^2$$

となる。点 A と点 D では $v=0$ なので，その点での位置エネルギーの和 U はともに $U=E$ で等しく，最大値になっている。また U が最小値になるのは，v が最大となる点 C である。

以上より，最も適当なものは ①。

補足　x 軸の原点を点 A，重力の位置エネルギーの基準を点 A とすると，物体の位置が x のときの位置エネルギーの和は

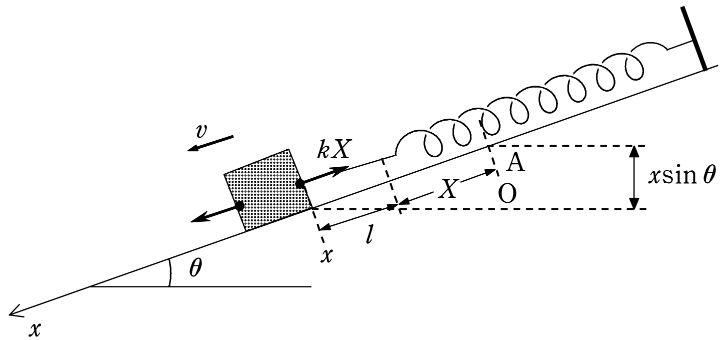


図 c

$0<x<l$ のとき

$$U=-mgx\sin\theta$$

$l<x$ のとき

$$U=-mgx\sin\theta+\frac{1}{2}kX^2$$
$$=-mgx\sin\theta+\frac{1}{2}k(x-l)^2$$
$$=\frac{1}{2}kx^2-kxl-mgx\sin\theta+\frac{1}{2}kl^2$$
$$=\frac{1}{2}k\left\{x-\left(l+\frac{mg}{k}\sin\theta\right)\right\}^2-mg\sin\theta\left(l+\frac{mg}{2k}\sin\theta\right)$$

となり，図 d のようになる。

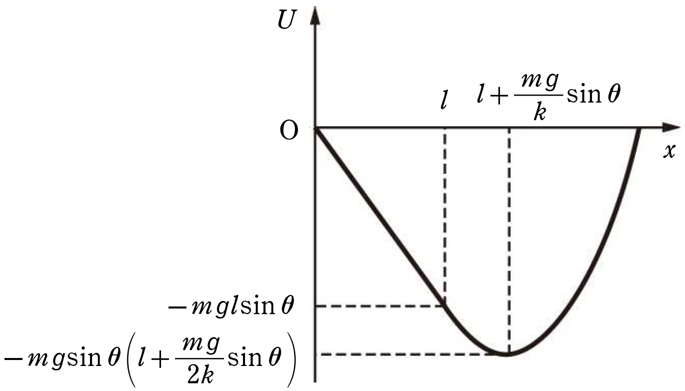


図 d

5

解答 (1) μmg〔N〕 (2) $\frac{1}{2}mga$〔N・m〕 (3) $\frac{1}{2}mg$〔N〕 (4) $\mu\geqq\frac{1}{2}$

(5) $mg-F\sin\theta$〔N〕 (6) $\frac{mg}{2(\cos\theta+\sin\theta)}$〔N〕 (7) $\frac{\pi}{4}$ rad (8) $\mu\geqq\frac{1}{3}$

ヒント (1)，(4) 最大摩擦力「μN」をこえる外力が加われば物体はすべり始める。

(2)，(3) 物体が傾き始めるときの垂直抗力の作用点は，回転軸となる点 A である。

(5) 垂直抗力の大きさは力のつりあいの関係から求める。mg と一致するとは限らないことに注意。

(7) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)$ で $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ となる関係を用いる。

(1) 点 A に加えた力 F_1，重力 mg，垂直抗力 N_1，そして静止摩擦力 f_1 を図示すると図 a となる。物体にはたらく力の，水平方向と鉛直方向のつりあいの式より

$f_1=F_1$， $N_1=mg$

外力 F_1 が最大摩擦力「μN」をこえると物体はすべり始めるので

$F_1\geqq\mu N=\mu mg$

よって，求める力の大きさは $\boldsymbol{\mu mg}$〔N〕

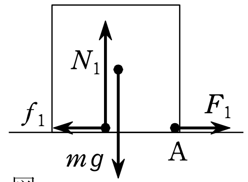


図 a

(2) 点 B に加えた力 F_2，垂直抗力 N_2，静止摩擦力 f_2，そして重力 mg を図示すると図 b となる※A←。

力のモーメントの式「$M=F_\perp\times l$」より

$mg\times\frac{1}{2}a=\boldsymbol{\frac{1}{2}mga}$〔N・m〕

(3) 物体が傾き始めるときの N_2 の作用点は点 A となるから，点 A のまわりの力のモーメントのつりあいより

$mg\times\frac{1}{2}a=F_2\times a$※B← よって $F_2=\boldsymbol{\frac{1}{2}mg}$〔N〕

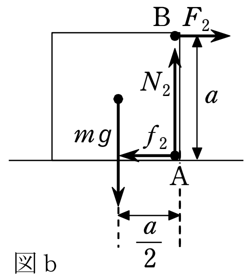


図 b

(4) (3) で求めた F_2 のとき，物体が水平面に対してすべらなければよい。力のつりあいより $f_2=F_2$，$N_2=mg$ よって $f_2=F_2=\frac{1}{2}mg$

摩擦力 f_2 が最大摩擦力「μN」以下であれば物体はすべり出さない。このことと，$N_2=mg$ から $f_2\leqq\mu N_2$ よって $F_2\leqq\mu mg$

すなわち $\frac{1}{2}mg\leqq\mu mg$ よって $\boldsymbol{\mu\geqq\frac{1}{2}}$

(5)　物体にはたらく力は，点 C に加えた F，重力 mg，垂直抗力 N_3，静止摩擦力 f_3 であり，それらを図示すると図 c となる[※C←]。

F を水平方向と鉛直方向に分解して考え，鉛直方向の力のつりあいより

$N_3+F\sin\theta=mg$　　よって　$N_3=\boldsymbol{mg-F\sin\theta}$ 〔N〕

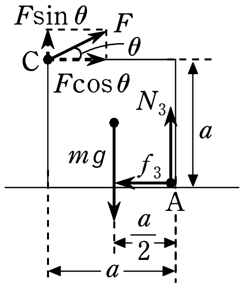


図 c

(6)　点 A のまわりの力のモーメントのつりあいを考えると

$$mg\times\frac{1}{2}a=F\cos\theta\times a+F\sin\theta\times a$$ [※D←]

よって　$F=\boldsymbol{\dfrac{mg}{2(\cos\theta+\sin\theta)}}$ 〔N〕

(7)　(6) の結果より，F を最小にするには，$\cos\theta+\sin\theta$ を最大にすればよい。

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)$$ [※E←]

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ となる。ここで，α は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たすから　$\alpha=\dfrac{1}{4}\pi$

よって，求める角 θ_{m} は　$\theta_{\mathrm{m}}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi}$ 〔rad〕[※F←]

(8)　(6) の結果に (7) の θ_{m} を代入すると，F の最小値 F_{m} は

$$F_{\mathrm{m}}=\frac{mg}{2(\cos\theta_{\mathrm{m}}+\sin\theta_{\mathrm{m}})}=\frac{mg}{2\sqrt{2}}$$

この力ですべることなく傾き始める条件を求める。すべらない条件は，(4) と同様に考えて $f_3\leqq\mu N_3$ であればよい。水平方向の力のつりあいより

$$f_3=F_{\mathrm{m}}\cos\theta_{\mathrm{m}}=\frac{mg}{2\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}mg$$

(5) より　$N_3=mg-F_{\mathrm{m}}\sin\theta_{\mathrm{m}}=mg-\dfrac{mg}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}mg$

よって　$\dfrac{1}{4}mg\leqq\mu\cdot\dfrac{3}{4}mg$　　ゆえに　$\boldsymbol{\mu\geqq\dfrac{1}{3}}$

←※A　F_2 を大きくすると，N_2 の作用点は右へ移動し，物体が傾くときの作用点は点 A となる。

←※B　力のモーメントの和

$$mg\times\frac{1}{2}a-F_2a=0$$

と考えてもよい。

←※C　傾き始めるときの N_3 の作用点は点 A である。

←※D　点 A のまわりの力のモーメントであるから，N_3 および f_3 による力のモーメントは 0 である。

←※E　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

←※F　別解

$$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta$$
$$=1+\sin2\theta$$

ここで，$\sin2\theta$ が最大になる角は　$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\theta_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{4}\pi$ 〔rad〕

6 ［2017 静岡大］

解答　[A] (1)　A：$M\alpha=T_1-Mg$，　B：$3M\alpha=3Mg-T_1$

(2)　$\dfrac{1}{2}$倍　　(3)　$3Mg$[N]

[B] (1)　A：$M\alpha'=T_1'-Mg$

B：$3M\beta'=3Mg-T_1'$

C：$4M\gamma'=4Mg-2T_1'$

(2)　$\alpha'-\gamma'=\beta'+\gamma'$　または　$\alpha'-\beta'=2\gamma'$

(3)　$T_1{}'=\dfrac{12}{7}Mg$〔N〕

ヒント　〔A〕 (2)　(1) の運動方程式から求められる。

(3)　大きさ T_2 の張力とつりあう力は，大きさ T_1 の下向きの張力 2 つ分であるから，$2T_1$ を求めればよい。

〔B〕 (3)　(1) と (2) で求めた式を用いる。

〔A〕　C が固定だから滑車 P も固定されていることとなる。おもり A，B にはたらく力を図示し，図 a のように加速度 α の向きを定める。一本の糸の張力 T_1 は同じである。

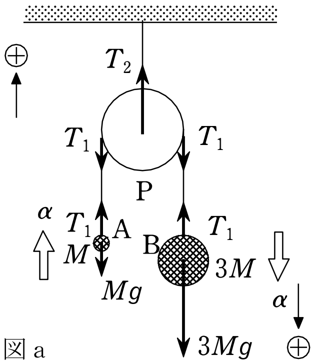


図 a

(1)　A について　$\boldsymbol{M\alpha=T_1-Mg}$　…… ①

B について　$\boldsymbol{3M\alpha=3Mg-T_1}$　…… ②

(2)　① 式＋② 式 で T_1 を消去すると

$4M\alpha=2Mg$　　よって　$\alpha=\dfrac{1}{2}g$　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ **倍**

(3)　① 式に α を代入して T_1 を求めると

$$T_1=M\cdot\frac{1}{2}g+Mg=\frac{3}{2}Mg$$

滑車 P についての力のつりあいを求める。滑車の質量は無視できるから

$$T_2=2\times T_1=2\times\frac{3}{2}Mg=\boldsymbol{3Mg}\ \text{〔N〕}$$※A←

〔B〕 〔A〕と同様にそれぞれの物体にはたらく力を図 b に示す。

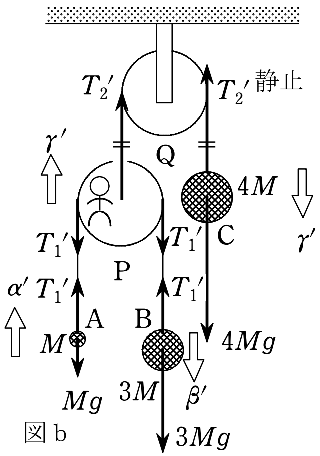


図 b

(1)　A について　$\boldsymbol{M\alpha'=T_1{}'-Mg}$　…… ③

B について　$\boldsymbol{3M\beta'=3Mg-T_1{}'}$　…… ④

C について　$4M\gamma'=4Mg-T_2{}'$　…… ⑤

ここで，滑車 P (質量 0) の運動方程式

$0\times\gamma'=T_2{}'-2T_1{}'$ を ⑤ 式に入れ

C について　$\boldsymbol{4M\gamma'=4Mg-2T_1{}'}$ ※B←　…… ⑤′

(2)　上向きを正の向きとすると，滑車 P から見たおもり A，B の相対加速度は

$\alpha_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}=\alpha'-\gamma'$　　$\alpha_{\mathrm{P}\to\mathrm{B}}=(-\beta')-\gamma'$

$\alpha_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}=-\alpha_{\mathrm{P}\to\mathrm{B}}$ であるから

$\alpha'-\gamma'=-(-\beta'-\gamma')$

ゆえに　$\boldsymbol{\alpha'-\gamma'=\beta'+\gamma'}$　または　$\boldsymbol{\alpha'-\beta'=2\gamma'}$　…… ⑥

参考　③，④，⑤′，⑥ 式から $\alpha'=\dfrac{5}{7}g$，$\beta'=\dfrac{3}{7}g$，$\gamma'=\dfrac{1}{7}g$，$T_2{}'=\dfrac{24}{7}Mg$ が得られる。

(3)　③ 式より　$\alpha'=\dfrac{1}{M}(T_1{}'-Mg)$　　④ 式より　$\beta'=\dfrac{1}{M}\left(Mg-\dfrac{T_1{}'}{3}\right)$

⑤′ 式より　$\gamma'=\dfrac{1}{M}\left(Mg-\dfrac{T_1{}'}{2}\right)$

以上を ⑥ 式 ($\alpha'-\beta'=2\gamma'$) に代入すると

$$\frac{1}{M}(T_1{}'-Mg)-\frac{1}{M}\left(Mg-\frac{T_1{}'}{3}\right)=2\times\frac{1}{M}\left(Mg-\frac{T_1{}'}{2}\right)$$

$$\frac{4}{3}T_1{}'-2Mg=2Mg-T_1{}'$$

よって　$T_1{}'=\boldsymbol{\dfrac{12}{7}Mg}$ 〔N〕

←※A　$T_2=(M+3M)g$ とはならないことに注意すること。滑車 P にはたらく力は張力 T_1 で，Mg，$3Mg$ ではない。

←※B　注　⑤′ 式を $2M\gamma'=2Mg-T_1{}'$ としてはいけない。運動方程式は

質量×加速度＝合力　であるから，物体Cの質量は$4M$であって$2M$ではないからである。