【定期試験対策講習】

２学期
期末考査
対策教材①

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「2 次関数」の後半
数学Ｋ「整数」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の 2 次不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$x^2+(a-1)x-a>0$　　(2)　$x^2-ax-2a^2\leqq 0$

$\boxed{2}$

(1)　関数 $y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の値域を求めよ。

(2)　x，y の 2 次式 $x^2-2xy+5y^2+6x-14y+5$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

$\boxed{3}$

2 次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフが次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

$\boxed{4}$

$x^2+y^2=4$ のとき，x^2-y^2+4x の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

(1)　関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $|x^2+2x|=k$ の実数解の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

$\boxed{6}$

$0\leqq x\leqq 2$ の範囲において，常に 2 次不等式 $x^2-2mx+1>0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$

$\dfrac{14}{15}$，$\dfrac{21}{20}$ のどちらに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

$\boxed{8}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 160，最大公約数が 8　　(2)　積が 300，最小公倍数が 60

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $a>-1$ のとき　$x<-a$, $1<x$

$a=-1$ のとき　1 以外のすべての実数

$a<-1$ のとき　$x<1$, $-a<x$

(2) $a>0$ のとき　$-a \leqq x \leqq 2a$,　$a=0$ のとき　$x=0$

$a<0$ のとき　$2a \leqq x \leqq -a$

$\boxed{2}$

解答 (1) $-6 \leqq y \leqq 3$　(2) $x=-2$, $y=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{3}$

解答 (1) $3<m<4$　(2) $0<m<3$

$\boxed{4}$

解答 $x=2$, $y=0$ で最大値 12, $x=-1$, $y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

$\boxed{5}$

解答 (1) [図]

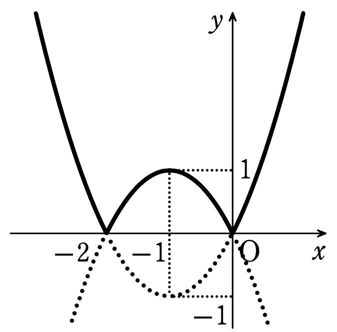
(2) $k<0$ のとき 0 個,

$k=0$ のとき 2 個,

$0<k<1$ のとき 4 個,

$k=1$ のとき 3 個,

$k>1$ のとき 2 個



$\boxed{6}$

解答 $m<1$

$\boxed{7}$

解答 $\dfrac{60}{7}$

$\boxed{8}$

解答 (1) $(a,\ b)=(8,\ 152), (24,\ 136), (56,\ 104), (72,\ 88)$

(2) $(a,\ b)=(5,\ 60), (15,\ 20)$

$\boxed{1}$

解説

(1) 左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-1)>0$ ……①

[1] $-a<1$ すなわち $a>-1$ のとき

① の解は　$x<-a$, $1<x$

[2] $-a=1$ すなわち $a=-1$ のとき

① は $(x-1)^2>0$ となり，解は　1 以外のすべての実数。

[3] $-a>1$ すなわち $a<-1$ のとき

① の解は　$x<1$, $-a<x$

(2) 左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-2a) \leqq 0$ ……①

[1] $-a<2a$ すなわち $a>0$ のとき

① の解は　$-a \leqq x \leqq 2a$

[2] $-a=2a$ すなわち $a=0$ のとき

① は $x^2 \leqq 0$ となり，解は　$x=0$

[3] $-a>2a$ すなわち $a<0$ のとき

① の解は　$2a \leqq x \leqq -a$

$\boxed{2}$

解説

(1) $x^2-6x=t$ とおくと　$t=(x-3)^2-9$　$(1 \leqq x \leqq 5)$

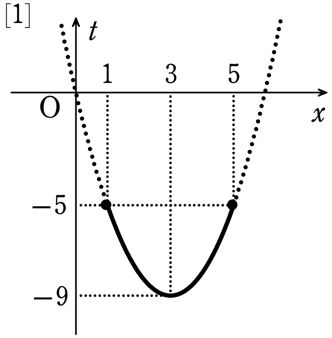
このグラフは図 [1] の実線部分となる。

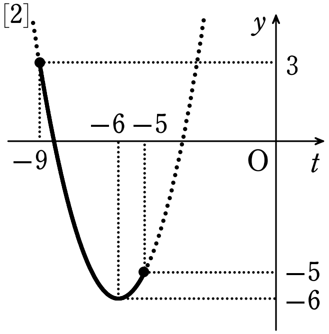
ゆえに，t の変域は　$-9 \leqq t \leqq -5$

よって　$y=t^2+12t+30=(t+6)^2-6$　$(-9 \leqq t \leqq -5)$

このグラフは図 [2] の実線部分となる。

したがって，求める値域は　$-6 \leqq y \leqq 3$





(2)　与式を x の 2 次関数とみて変形すると

与式 $=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=\{x-(y-3)\}^2-(y-3)^2+5y^2-14y+5$

$=\{x-(y-3)\}^2+4y^2-8y-4=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-8$

与式は $x=y-3$ で最小値 $4(y-1)^2-8$ をとる。

また，$4(y-1)^2-8$ は $y=1$ で最小値 -8 をとる。

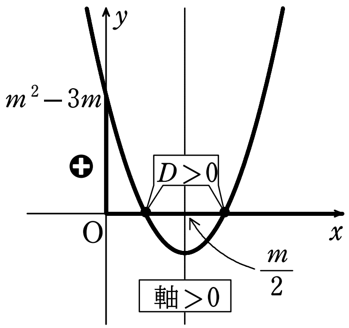
よって，与式は $x=y-3$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

すなわち，$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8 をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

$f(x)=x^2-mx+m^2-3m$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。



(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

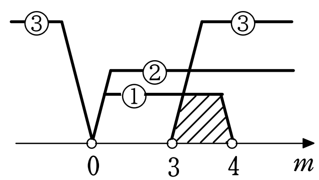
$D=(-m)^2-4(m^2-3m)=-3m(m-4)>0$

ゆえに　　$m(m-4)<0$

よって　　$0<m<4$　……①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\dfrac{m}{2}$ で，この軸について

$\dfrac{m}{2}>0$　　よって　　$m>0$　……②



[3]　$f(0)>0$ であるから　　$m^2-3m>0$

ゆえに　　$m(m-3)>0$

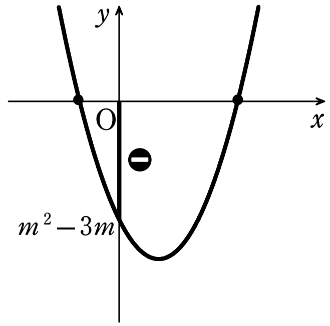
よって　　$m<0$，$3<m$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　　$3<m<4$

(2)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，

$f(0)=m^2-3m=m(m-3)<0$ のときである。

したがって　　$0<m<3$



$\boxed{4}$

(解説)

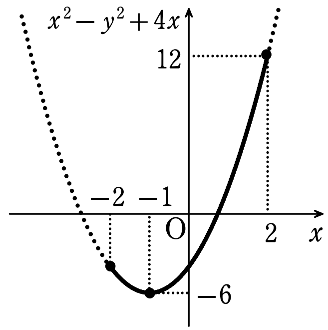
$x^2+y^2=4$ から　　$y^2=4-x^2$　……①

$y^2\geqq 0$ であるから　　$4-x^2\geqq 0$

よって　　$(x+2)(x-2)\leqq 0$　　　ゆえに　　$-2\leqq x\leqq 2$　……②

$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$

$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$



よって，② の範囲の x について，x^2-y^2+4x は

$x=2$　で最大値 12，

$x=-1$ で最小値 -6　をとる。

① から

$x=2$　のとき　$y^2=0$　　　よって　$y=0$

$x=-1$ のとき　$y^2=3$　　　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって　　$x=2$，$y=0$ で最大値 12

$x=-1$，$y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$y=|x^2+2x|=|x(x+2)|$

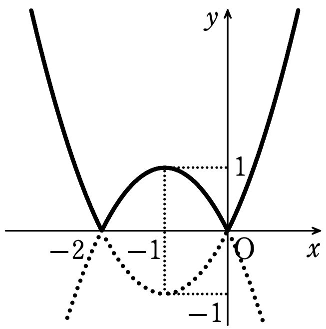
$x(x+2)\geqq 0$ すなわち $x\leqq -2,\ 0\leqq x$ のとき

$$|x^2+2x|=x^2+2x=(x+1)^2-1$$

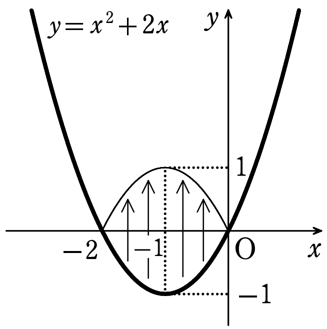
$x(x+2)<0$ すなわち $-2<x<0$ のとき

$$|x^2+2x|=-(x^2+2x)$$
$$=-(x+1)^2+1$$

よって，関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる。

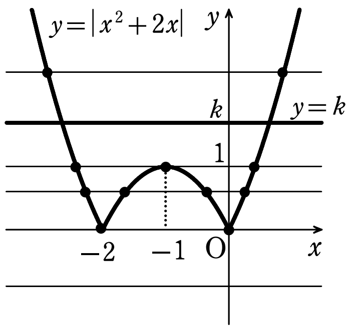


別解　まず，$y=x^2+2x$ のグラフをかき，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返してもよい。



(2)　この方程式の実数解の個数は，$y=|x^2+2x|$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。よって，右の図から

$k<0$ のとき 0 個，
$k=0$ のとき 2 個，
$0<k<1$ のとき 4 個，
$k=1$ のとき 3 個，
$k>1$ のとき 2 個



$\boxed{6}$

(解説)

$f(x)=x^2-2mx+1$ とすると　　$f(x)=(x-m)^2+1-m^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=m$

$0\leqq x\leqq 2$ で常に $f(x)>0$ が成り立つのは，$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値が正となるときである。

[1]　$m<0$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(0)=1$

これは正であるから，$m<0$ ……① のとき，条件を満たす。

[2]　$0\leqq m\leqq 2$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(m)=1-m^2$

よって　　$1-m^2>0$　　　すなわち　　$(m+1)(m-1)<0$

ゆえに　　$-1<m<1$

これと $0\leqq m\leqq 2$ の共通範囲は　　$0\leqq m<1$　……②

[3]　$2<m$ のとき

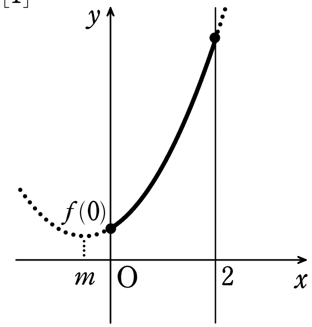
$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(2)=5-4m$

よって　　$5-4m>0$

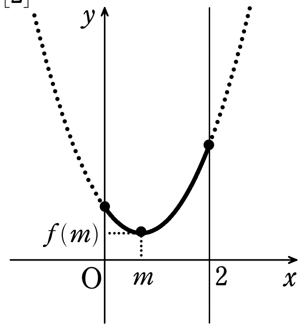
ゆえに　　$m<\dfrac{5}{4}$　　　　これと $m>2$ の共通範囲はない。

求める m の値の範囲は，① と ② の範囲を合わせて　　$m<1$

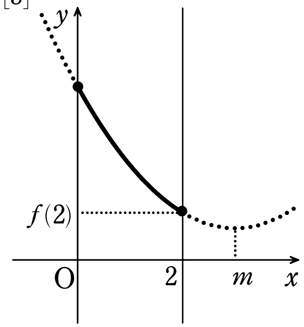
[1]



[2]



[3]



$\boxed{7}$

(解説)

求める分数を $\dfrac{a}{b}$ (a，b は互いに素である自然数) とする。

$\dfrac{14}{15}\times\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{21}{20}\times\dfrac{a}{b}$ が自然数であるから，

a は 15，20 の公倍数，　b は 14，21 の公約数

となる。$\dfrac{a}{b}$ は，このような数のうち最も小さいものであるから，

a は 15，20 の最小公倍数，　b は 14，21 の最大公約数

である。

よって　　$a=60$，$b=7$　　　　したがって，求める分数は　$\dfrac{60}{7}$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　最大公約数が 8 であるから，a，b は

$a=8a'$，$b=8b'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$8a'+8b'=160$　すなわち　$a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 19),\ (3,\ 17),\ (7,\ 13),\ (9,\ 11)$

よって　　$(a,\ b)=(8,\ 152),\ (24,\ 136),\ (56,\ 104),\ (72,\ 88)$

(2)　最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

$300=g\cdot 60$　　　　よって　$g=5$

最小公倍数が 60 であるから

$ga'b'=60$　すなわち　$5a'b'=60$

よって　　$a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

$(a',\ b')=(1,\ 12),\ (3,\ 4)$

したがって　　$(a,\ b)=(5,\ 60),\ (15,\ 20)$