中１甲陽数学　冬期課題講座対策

1

x についての連立不等式 $\begin{cases} 5x-8>2x+1 \\ 2x+3>4x-2a \end{cases}$ を満たす整数 x の個数が，ちょうど３個であるような a の値の範囲を求めなさい。

2

あるクラスの生徒全員が長いすに座ることになった。１つの長いすに４人ずつ座ると６人が座れなくなり，１つの長いすに６人ずつ座ると，使わない長いすが１つあった。ただし，最後に使った長いすには少なくとも１人は座っているものとする。長いすの個数はいくつであるか，不等式を立てて答えなさい。

3

次の条件を満たす直線の式を求めなさい。

(1)　２点 $(5,\ -6)$，$(-3,\ 2)$ を結ぶ線分の中点を通り，$y=3x$ に平行な直線

(2)　直線 $x-2y=4$ と x 軸上で交わり，直線 $y=4x$ と平行な直線

(3)　直線 $y=2x+3$ と x 軸に関して対称な直線

4

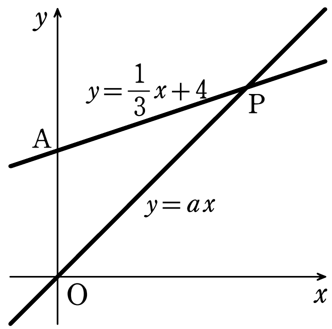
３点 A$(0,\ 5)$，B$(-1,\ a+3)$，C$(3,\ 1-a)$ が一直線上にあるとき，定数 a の値を求めなさい。

5

１次関数 $y=ax+b$ の定義域が $-2\leqq x\leqq 3$ であるとき，値域は $-3\leqq y\leqq 7$ となる。定数 a，b の値を求めなさい。

6

右の図のように，直線 $y=\dfrac{1}{3}x+4$ が y 軸と点 A で交わっている。この直線と直線 $y=ax$ $(a>0)$ の交点を P とする。



(1)　△OAP の面積が 24 であるとき，a の値を求めなさい。

(2)　$a=1$ のとき，P の座標を求めなさい。

(3)　$a=1$ のとき，Oを通り，△OAP の面積を２等分する直線の式を求めなさい。

7

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$-2mx^2-4mx+30m$　　(2)　$6x^2-23ax+15a^2$　　(3)　$2ax-bx+4ay-2by$

(4)　x^4-16y^4　　(5)　a^4-5a^2-36　　(6)　$x^2+2xy+y^2-5x-5y+6$

(7)　$2(x^2-1)^2-6x^2+6$　　(8)　x^2-4y^2+8y-4　　(9)　$(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3$

8

次の計算をしなさい。

(1)　$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{8}+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\sqrt{54}-\dfrac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

(3)　$\{(3+\sqrt{10})^{100}+(3-\sqrt{10})^{100}\}^2-\{(3+\sqrt{10})^{100}-(3-\sqrt{10})^{100}\}^2$

9

$(\sqrt{2}+1)^2$ の小数部分を a とするとき，a^2+4a の値を求めよ。

10

次の２次方程式を解きなさい。

(1)　$(2x-3)(5x+6)-(3x+4)(3x-4)=0$　　(2)　$(2x+1)^2-32=4(2x+1)$

$\boxed{11}$

x の２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解を，それぞれ３倍したものが，
２次方程式 $x^2+6x-27=0$ の２つの解となる。このとき，定数 a，b の値を求めなさい。

$\boxed{12}$

(1)　関数 $y=-4x^2$ について，定義域が $a \leqq x \leqq 2$ のとき，値域が $-36 \leqq y \leqq b$ となる。
定数 a，b の値を求めなさい。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，定義域が $-3 \leqq x \leqq 8$ のとき，値域が $b \leqq y \leqq 48$ となる。
定数 a，b の値を求めなさい。

$\boxed{13}$

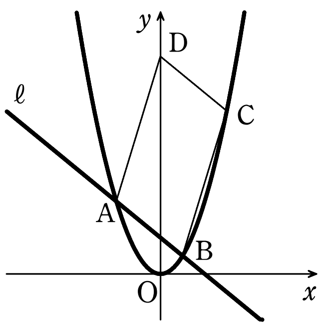
関数 $y=-2x^2$ について，x の値が -3 から k まで増加するときの変化の割合が -4となる。このとき，定数 k の値を求めなさい。ただし，$k>-3$ とする。

$\boxed{14}$

右の図のように，放物線 $y=ax^2$ と直線 ℓ が２点A，Bで交わっている。この放物線上に点Cを，y 軸上に点Dをとり，平行四辺形ABCDを作る。点Aの座標は $(-2,\ 8)$，点Bの x 座標は１である。このとき，次のものを求めなさい。

(1)　a の値　　(2)　直線 ℓ の式

(3)　点Cの座標　　(4)　点Dの座標



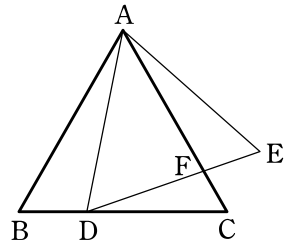
$\boxed{15}$

右の図のように，正三角形ABCの辺BC上に点Dをとり，ADを１辺とする正三角形ADEをつくる。
辺ACとDEの交点をFとするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　△ABD∽△AEFであることを証明しなさい。

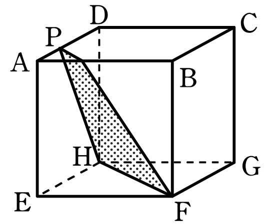
(2)　△ABD∽△DCFであることを証明しなさい。

(3)　AB＝9，BD＝3であるとき，AFの長さを求めなさい。



$\boxed{16}$

立方体ABCD－EFGHの辺ADを１：２に内分する点をPとし，３点P，H，Fを通る平面で立方体を切って２つの立体に分ける。頂点Aを含む方の立体の体積は，もとの立方体の体積の何倍か答えなさい。

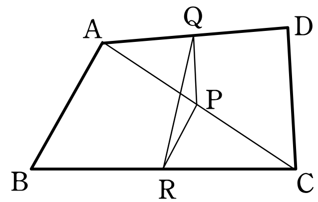


$\boxed{17}$

AB＝CDである四角形ABCDの対角線ACの中点をP，辺AD，BCの中点をそれぞれQ，Rとする。

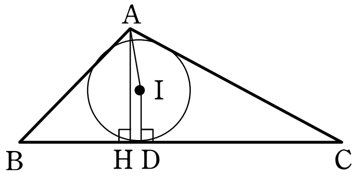
(1)　右の図のように△PQRができるとき，
∠PQR＝∠PRQであることを証明しなさい。

(2)　３点P，Q，Rが一直線上に並ぶのは，四角形ABCDがどのような四角形であるときか答えなさい。



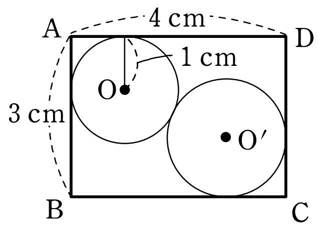
$\boxed{18}$

△ABC の頂点 A，内心 I から辺 BC へそれぞれ垂線 AH，ID を引く。
BC＝32 cm，CA＝24 cm，AB＝16 cm のとき，AH：ID を求めなさい。



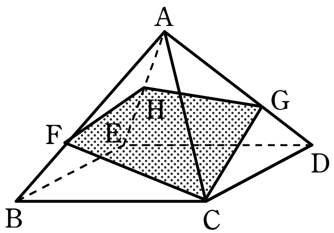
$\boxed{19}$

右の図のように，長方形 ABCD の 2 辺 AB，AD に接する半径 1 cm の円 O がある。AB＝3 cm，AD＝4 cm とする。2 辺 BC，CD と円 O に接する円 O′ の半径を求めなさい。



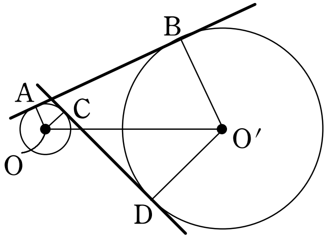
$\boxed{20}$

辺の長さがすべて 6 cm の正四角錐 A－BCDE がある。辺 AB，AD 上にそれぞれ点 F，G を AF＝AG＝4 cm となるようにとる。3 点 C，F，G を通る平面と辺 AE との交点を H とするとき，次のものを求めなさい。
(1)　線分 CH の長さ
(2)　四角形 CGHF の面積



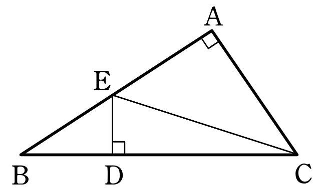
$\boxed{21}$

右の図において，A，B，C，D は，2 つの円 O，O′ の共通接線の接点である。円 O，O′ の半径がそれぞれ 1 cm，4 cm，中心間の距離が 7 cm であるとき，線分 AB と CD の長さをそれぞれ求めなさい。



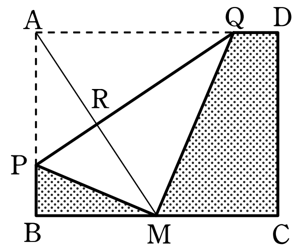
$\boxed{22}$

右の図の直角三角形 ABC について，AB＝5 cm，BC＝6 cm である。D が辺 BC を 1：2 に内分するとき，線分 EC の長さを求めなさい。



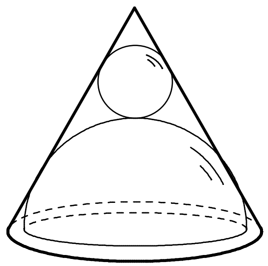
$\boxed{23}$

右の図のように，AB＝6 cm，AD＝8 cm の長方形 ABCD を，頂点 A が辺 BC の中点 M に重なるように折り返す。折り目を PQ とし，線分 PQ，AM の交点を R とする。
(1)　線分 PM，QM の長さを求めなさい。
(2)　線分 PR の長さを求めなさい。
(3)　四角形 APMQ の面積を求めなさい。



24

右の図のような，円錐の底面と面を共有している半径 6 cm の半球と，半径 2 cm の球がある。
半球と球は互いに外接し，円錐の側面にもそれぞれ接している。このとき，次のものを求めなさい。



(1)　円錐の高さ　　　　(2)　円錐の体積

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{9}{2}<a\leqq\dfrac{11}{2}$

$\boxed{2}$

解答　6個または7個または8個

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=3x-5$　　(2)　$y=4x-16$　　(3)　$y=-2x-3$

$\boxed{4}$

解答　$a=5$

$\boxed{5}$

解答　$\begin{cases} a=2,\ b=1 \\ a=-2,\ b=3 \end{cases}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a=\dfrac{2}{3}$　　(2)　$(6,\ 6)$　　(3)　$y=\dfrac{5}{3}x$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$-2m(x-3)(x+5)$　　(2)　$(x-3a)(6x-5a)$　　(3)　$(2a-b)(x+2y)$

(4)　$(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$　　(5)　$(a^2+4)(a+3)(a-3)$

(6)　$(x+y-2)(x+y-3)$　　(7)　$2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(8)　$(x+2y-2)(x-2y+2)$　　(9)　$(x+1)^2(x-1)(x+3)$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$2-2\sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{2}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　(3)　4

$\boxed{9}$

解答　4

$\boxed{10}$

解答　(1)　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$　　(4)　$x=-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$

$\boxed{11}$

解答　$a=2,\ b=-3$

$\boxed{12}$

解答　(1)　$a=-3,\ b=0$　　(2)　$a=\dfrac{3}{4},\ b=0$

$\boxed{13}$

解答　$k=5$

$\boxed{14}$

解答　(1)　$a=2$　　(2)　$y=-2x+4$　　(3)　$(3,\ 18)$　　(4)　$(0,\ 24)$

$\boxed{15}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　7

$\boxed{16}$

解答　$\dfrac{13}{54}$倍

$\boxed{17}$

解答　(1)　略　　(2)　平行四辺形

$\boxed{18}$

解答　9：4

$\boxed{19}$

解答　$(6-2\sqrt{6})$ cm

$\boxed{20}$

解答　(1)　$3\sqrt{5}$ cm　　(2)　$6\sqrt{10}$ cm^2

$\boxed{21}$

解答　$\mathrm{AB}=2\sqrt{10}$ cm，$\mathrm{CD}=2\sqrt{6}$ cm

22

解答　$\dfrac{2\sqrt{111}}{5}$ cm

23

解答　(1)　$\mathrm{PM}=\dfrac{13}{3}$ cm，$\mathrm{QM}=\dfrac{13}{2}$ cm　　(2)　$\mathrm{PR}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$ cm

(3)　$\dfrac{169}{6}$ cm^2

24

解答　(1)　12 cm　　(2)　192π cm^3

1

解説

$$\begin{cases} 5x-8>2x+1 & \cdots\cdots ① \\ 2x+3>4x-2a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より　　$3x>9$

$x>3$　　……③

② より　　$-2x>-2a-3$

$x<\dfrac{2a+3}{2}$　　……④

条件から，③，④ の共通範囲が

$3<x<\dfrac{2a+3}{2}$　　……⑤

の形になり，この範囲に含まれる整数が 4，5，6 のみになればよい。

よって，⑤ の範囲の右端 $\dfrac{2a+3}{2}$ が 6 より大きく 7 以下の値をとればよい。

すなわち　　$6<\dfrac{2a+3}{2}\leqq 7$

$12<2a+3\leqq 14$

$9<2a\leqq 11$

したがって　　$\dfrac{9}{2}<a\leqq\dfrac{11}{2}$

2

解説

長いすの個数を x 個とすると，クラスの生徒の人数は

$(4x+6)$ 人

6 人ずつ座ったとき，最後に使った長いすに座っている生徒の人数は

$(4x+6)-6(x-2)=18-2x$ (人)

よって　　$1\leqq 18-2x\leqq 6$

$-17\leqq -2x\leqq -12$

$\dfrac{17}{2}\geqq x\geqq 6$

すなわち　$6\leqq x\leqq\dfrac{17}{2}$

$\dfrac{17}{2}=8.5$ で，x は自然数であるから　$x=6，7，8$

よって，6 個または 7 個または 8 個

これは問題に適している。

3

解説

(1)　2 点 $(5,\ -6)$，$(-3,\ 2)$ を結ぶ線分の中点の座標は

$\left(\dfrac{5-3}{2},\ \dfrac{-6+2}{2}\right)$　すなわち　$(1,\ -2)$

$y=3x$ に平行であるから，求める直線の式は　$y=3x+b$　と表される。

この直線が，点 $(1,\ -2)$ を通るから

$-2=3\times 1+b$　　よって　　$b=-5$

したがって，求める直線の式は　　$y=3x-5$

(2)　$x-2y=4$ で $y=0$ とすると　　$x=4$

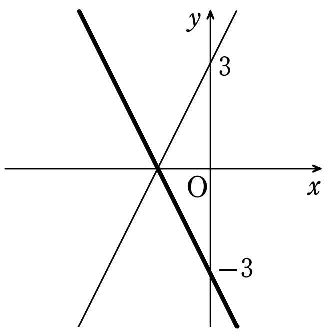
よって，直線 $x-2y=4$ の x 軸上の点は　$(4,\ 0)$

直線 $y=4x$ と平行な直線の式は $y=4x+b$ とおける。

この直線が点 $(4,\ 0)$ を通るから　　$0=4\times 4+b$　　　よって　$b=-16$

したがって，求める直線の式は　　$y=4x-16$

(3)　直線 $y=2x+3$ と x 軸に関して対称な直線は，右の図から，傾きが -2，y 切片が -3 であることがわかる。
したがって，求める直線の式は　$y=-2x-3$



4

(解説)

3 点 A，B，C が一直線上にあるから，直線 AB の傾きと直線 BC の傾きは等しい。

直線 AB の傾きは　$\dfrac{(a+3)-5}{-1-0}=-a+2$

直線 BC の傾きは　$\dfrac{(1-a)-(a+3)}{3-(-1)}=\dfrac{-2a-2}{4}=\dfrac{-a-1}{2}$

よって　$-a+2=\dfrac{-a-1}{2}$

したがって　$a=5$

5

(解説)

$a>0$ のとき

1 次関数 $y=ax+b$ のグラフは右上がりの直線である。

よって　$x=-2$ のとき　$y=-3$ …… ①

$x=3$ 　のとき　$y=7$ …… ②

① より　$-3=-2a+b$ …… ③

② より　$7=3a+b$ …… ④

③，④ を連立方程式として解くと　$a=2$，$b=1$　($a>0$ を満たす)

$a<0$ のとき

1 次関数 $y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線である。

よって　$x=-2$ のとき　$y=7$ …… ⑤

$x=3$ 　のとき　$y=-3$ …… ⑥

⑤ より　$7=-2a+b$ …… ⑦

⑥ より　$-3=3a+b$ …… ⑧

⑦，⑧ を連立方程式として解くと　$a=-2$，$b=3$　($a<0$ を満たす)

(答)　$\begin{cases} a=2,\ b=1 \\ a=-2,\ b=3 \end{cases}$

6

(解説)

(1)　P の x 座標を t とする。

A (0，4) であるから　OA＝4

よって，△OAP の面積について

$\dfrac{1}{2}\times4\times t=24$

$t=12$

P は直線 $y=\dfrac{1}{3}x+4$ 上の点であるから，$x=12$ を $y=\dfrac{1}{3}x+4$ に代入して

$y=\dfrac{1}{3}\times12+4=8$

よって，P の座標は　(12，8)

P は直線 $y=ax$ 上の点でもあるから，$x=12$，$y=8$ を $y=ax$ に代入して

$8=a\times12$

したがって　$a=\dfrac{2}{3}$

(2)　P は直線 $y=\dfrac{1}{3}x+4$ …… ① と直線 $y=x$ …… ② の交点である。

② を ① に代入すると　$x=\dfrac{1}{3}x+4$

$x=6$

$x=6$ を ② に代入して　$y=6$

よって，P の座標は　(6，6)

(3)　O を通り，△OAP の面積を 2 等分する直線は，線分 AP の中点を通る。

(2) より，Ｐの座標は (6，6) であるから，線分 AP の中点の座標は

$$\left(\frac{0+6}{2},\ \frac{4+6}{2}\right)$$

すなわち　(3，5)

よって，2 点 (0，0)，(3，5) を通る直線の式を求めると　$y=\frac{5}{3}x$

$\boxed{7}$

解説

(1)　$-2mx^2-4mx+30m=-2m(x^2+2x-15)=-2m(x-3)(x+5)$

(2)　$6x^2-23ax+15a^2=(x-3a)(6x-5a)$

(3)　$2ax-bx+4ay-2by=x(2a-b)+2y(2a-b)=(2a-b)(x+2y)$

(4)　$x^4-16y^4=(x^2)^2-(4y^2)^2=(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)=(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$

(5)　$a^4-5a^2-36=(a^2+4)(a^2-9)=(a^2+4)(a+3)(a-3)$

(6)　$x^2+2xy+y^2-5x-5y+6=(x+y)^2-5(x+y)+6=\{(x+y)-2\}\{(x+y)-3\}$

$=(x+y-2)(x+y-3)$

(7)　$2(x^2-1)^2-6x^2+6=2(x^2-1)^2-6(x^2-1)=2(x^2-1)\{(x^2-1)-3\}$

$=2(x^2-1)(x^2-4)=2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(8)　$x^2-4y^2+8y-4=x^2-4(y^2-2y+1)=x^2-4(y-1)^2=x^2-\{2(y-1)\}^2$

$=\{x+2(y-1)\}\{x-2(y-1)\}=(x+2y-2)(x-2y+2)$

(9)　$(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3=(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=\{(x^2+2x)+1\}\{(x^2+2x)-3\}$

$=(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=(x+1)^2(x-1)(x+3)$

$\boxed{8}$

解説

(1)　$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)=\{(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}\}$

$=(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{3}+1-2$

$=2-2\sqrt{3}$

(2)　$\frac{\sqrt{8}+3\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\sqrt{54}-\frac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{6})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-3\sqrt{6}-\frac{(4-2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{2\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{3}-3\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}-(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$

$=\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{6}}{3}$

(3)　$(3+\sqrt{10})^{100}=a$，$(3-\sqrt{10})^{100}=b$　とおくと

$\{(3+\sqrt{10})^{100}+(3-\sqrt{10})^{100}\}^2-\{(3+\sqrt{10})^{100}-(3-\sqrt{10})^{100}\}^2$

$=(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=4ab$

したがって

$\{(3+\sqrt{10})^{100}+(3-\sqrt{10})^{100}\}^2-\{(3+\sqrt{10})^{100}-(3-\sqrt{10})^{100}\}^2$

$=4\times(3+\sqrt{10})^{100}\times(3-\sqrt{10})^{100}=4\{(3+\sqrt{10})(3-\sqrt{10})\}^{100}$

$=4\{3^2-(\sqrt{10})^2\}^{100}=4(-1)^{100}=4$

$\boxed{9}$

解説

$$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$$

$2^2<(2\sqrt{2})^2<3^2$ より，$2\sqrt{2}$ の整数部分は　2

よって，$3+2\sqrt{2}$ の整数部分は　5

$3+2\sqrt{2}$ の小数部分は

$a=(3+2\sqrt{2})-5$

$=-2+2\sqrt{2}$

よって　$a^2+4a=a(a+4)$

$=(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)$

$=8-4$

$=4$

$\boxed{10}$

(解説)

(1)　$(2x-3)(5x+6)-(3x+4)(3x-4)=0$ を整理すると

$$x^2-3x-2=0$$

よって　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(2)　$2x+1=t$ とおくと，方程式は次のようになる。

$$t^2-32=4t$$

$$t^2-4t-32=0$$

$$(t+4)(t-8)=0$$

よって　$t=-4,\ 8$

すなわち　$2x+1=-4$　または　$2x+1=8$

したがって　$x=-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}$

$\boxed{11}$

(解説)

2 次方程式 $x^2+6x-27=0$ の 2 つの解を，それぞれ 3 でわったものが，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解となる。

2 次方程式　$x^2+6x-27=0$　を解く。

$$(x-3)(x+9)=0$$

よって　$x=3,\ -9$

したがって，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解は　$x=1,\ -3$

1 が解であるから　$1^2+a\times1+b=0$

すなわち　$1+a+b=0$　…… ①

-3 が解であるから　$(-3)^2+a\times(-3)+b=0$

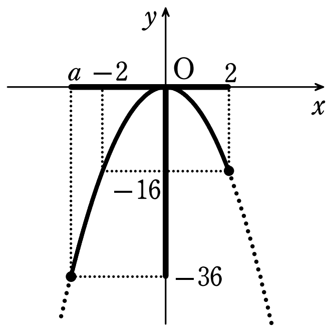
すなわち　$9-3a+b=0$　…… ②

①，② より　$a=2,\ b=-3$

$\boxed{12}$

(解説)

(1)　$y=-4x^2$ について



$x=a$ のとき　$y=-4a^2$

$x=2$ のとき　$y=-16$

$-16\neq-36$ であるから，$a<-2$ で $x=a$ のとき $y=-36$ となる。

よって　$-4a^2=-36$

したがって　$a^2=9$

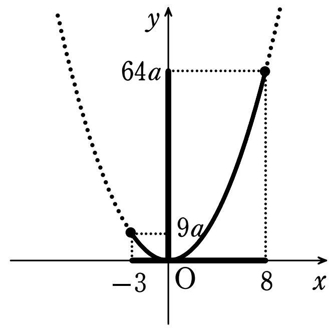
$a<-2$ であるから　$a=-3$

また，グラフから　$b=0$

(答)　$a=-3,\ b=0$

(2)　関数 $y=ax^2$ の値域は，$a>0$ のとき 0 以上，$a<0$ のとき 0 以下となり，正と負にまたがることはない。

この関数の値域は $b\leqq y\leqq48$ であるから　$a>0$



$y=ax^2$ について

$x=-3$ のとき　$y=9a$

$x=8$　のとき　$y=64a$

グラフから，値域は　$0\leqq y\leqq64a$

これが $b\leqq y\leqq48$ と等しいから

$0=b,\ 64a=48$

よって　$a=\dfrac{3}{4},\ b=0$

$\boxed{13}$

(解説)

$x=-3$ のとき　$y=-2\times(-3)^2=-18$

$x=k$　のとき　$y=-2k^2$

よって，x の値が -3 から k まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-2k^2-(-18)}{k-(-3)}=\frac{-2(k^2-9)}{k+3}=\frac{-2(k+3)(k-3)}{k+3}$$
$$=-2(k-3)$$

これが -4 に等しいから　　$-2(k-3)=-4$

これを解いて　　$k=5$

これは $k>-3$ を満たす。　　　　　答　$k=5$

14

解説

(1)　放物線 $y=ax^2$ は点 A $(-2,\ 8)$ を通るから　　$8=a\times(-2)^2$

よって　　$a=2$

(2)　$y=2x^2$ について

$x=1$ のとき　$y=2\times1^2=2$

よって，点 B の座標は　$(1,\ 2)$

直線 ℓ の式を $y=mx+n$ とおくと，ℓ は 2 点 A，B を通るから

$8=-2m+n$，$2=m+n$

これを解くと　　$m=-2$，$n=4$

したがって，直線 ℓ の式は　　$y=-2x+4$

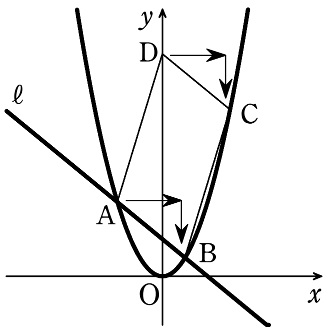
(3)　平行四辺形 ABCD においては，点 A から点 B への移動と，点 D から点 C への移動は，同じ移動である。

点 A から点 B への移動は，右に 3，下に 6 の移動である。

点 D の x 座標は 0 であるから，点 C の x 座標は 3 になる。

よって，点 C の y 座標は　　$2\times3^2=18$

答　$(3,\ 18)$



(4)　点 D の y 座標は，点 C の y 座標より 6 だけ大きいから

$18+6=24$

よって，点 D の座標は　　$(0,\ 24)$

15

解説

(1)　△ABD と △AEF において

正三角形の内角はすべて 60° であるから

$\angle ABD=\angle AEF=60°$　…… ①

また　$\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC$

$=60°-\angle DAC$

$\angle EAF=\angle DAE-\angle DAC$

$=60°-\angle DAC$

よって　$\angle BAD=\angle EAF$　　…… ②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD\backsim\triangle AEF$

(2)　△ABD と △DCF において

正三角形の内角はすべて 60° であるから

$\angle ABD=\angle DCF=60°$　…… ③

(1) より，$\triangle ABD\backsim\triangle AEF$ であるから

$\angle BDA=\angle EFA$

$\angle CFD=\angle EFA$ (対頂角) であるから

$\angle BDA=\angle CFD$　　　…… ④

③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD\backsim\triangle DCF$

(3)　(2) より，$\triangle ABD\backsim\triangle DCF$ であるから

$AB:DC=BD:CF$

よって　　$9:(9-3)=3:CF$

すなわち　　$9:6=3:CF$

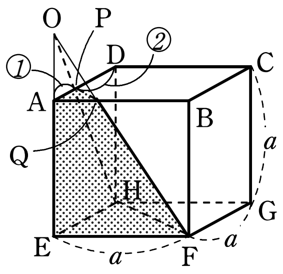
よって　　$9\times CF=6\times3$

これを解いて　　$CF=2$

したがって　　$AF=9-2=7$

16

解説

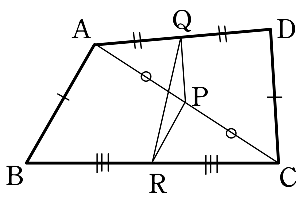


３点 P，H，F を通る平面と辺 AB の交点を Q とし，
EA，FQ，HP の延長の交点を O とする。
三角錐 OEFH と三角錐 OAQP は相似で，相似比は
　　EH：AP＝AD：AP＝3：1
よって，体積比は　　$3^3 : 1^3 = 27 : 1$
立方体を切ってできる，頂点 A を含む方の立体 は，
三角錐 OEFH から三角錐 OAQP を除いたものである。
よって，その体積を V，三角錐 OAQP の体積を V'
とすると
　　$V : V' = (27-1) : 1 = 26 : 1$　……①
ここで，AP∥EH であるから　　OA：OE＝AP：EH
立方体の１辺の長さを a とすると　OA：(OA＋a)＝1：3
よって　　$\mathrm{OA} = \frac{1}{2}a$
三角錐 OAQP の体積は　　$V' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a \times \frac{1}{3}a\right) \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{108}a^3$
① から　　$V = 26 \times V' = \frac{13}{54}a^3$
立方体の体積は a^3 であるから　　$\frac{13}{54}a^3 \div a^3 = \frac{13}{54}$　　　答　$\frac{13}{54}$ 倍

17

解説

(1)　証明　△ACD において，点 P，Q はそれぞれ辺 AC，AD の中点である。



よって，中点連結定理により
　　PQ∥CD　……①
　　$\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\mathrm{CD}$　……②
同様にして　　PR∥AB　……③，　$\mathrm{PR} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$　……④
また，仮定より　　AB＝CD　……⑤
②，④，⑤ から　　PQ＝PR
よって，△PQR は PQ＝PR の二等辺三角形であるから
　　∠PQR＝∠PRQ　　終

(2)　3 点 P，Q，R が一直線上に並ぶとき　PQ∥PR
これと，①，③ から　　AB∥CD　……⑥
⑤，⑥ より，１組の対辺が平行でその長さが等しいから，四角形 ABCD は平行四辺形である。
したがって，3 点 P，Q，R が一直線上に並ぶのは，四角形 ABCD が平行四辺形のときである。

18

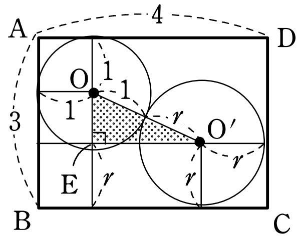
解説

ID は内接円の半径であるから，△ABC の面積は　$\frac{1}{2}(32+24+16) \times \mathrm{ID} = 36\mathrm{ID}$
また，辺 BC を底辺とみると，△ABC の面積は　　$\frac{1}{2} \times 32 \times \mathrm{AH} = 16\mathrm{AH}$
よって　　$36\mathrm{ID} = 16\mathrm{AH}$
すなわち　　$\mathrm{ID} = \frac{4}{9}\mathrm{AH}$
したがって　　$\mathrm{AH} : \mathrm{ID} = \mathrm{AH} : \frac{4}{9}\mathrm{AH} = 9 : 4$

19

(解説)

円 O′ の半径を r cm とする。
また，O を通り辺 AB に平行な直線と，O′ を通り辺 BC に平行な直線の交点を E とする。



2 つの円 O，O′ は外接しているから

$OO'=r+1$

また，図から　$OE=3-1-r=2-r$　……①

$O'E=4-1-r=3-r$　……②

直角三角形 OEO′ において

$(2-r)^2+(3-r)^2=(r+1)^2$

すなわち　$r^2-12r+12=0$

これを解くと　$r=\dfrac{12\pm\sqrt{96}}{2}=6\pm2\sqrt{6}$

①，② から　$r<2$

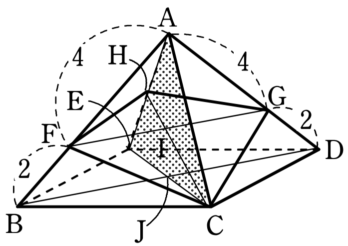
したがって　$r=6-2\sqrt{6}$

答　$(6-2\sqrt{6})$ cm

20

(解説)

(1)　線分 CH と線分 FG の交点を I とし，底面の対角線 BD と CE の交点を J とする。



ここで　$AF:FB=4:(6-4)=2:1$

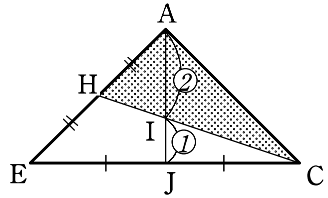
$AG:GD=4:(6-4)=2:1$

よって　FG∥BD

したがって　$AI:IJ=2:1$　……①

$FG=\dfrac{2}{3}BD$　……②

J は線分 EC の中点であるから，① より，I は △ACE の重心となる。



H は直線 CI と辺 AE の交点であるから，辺 AE の中点である。

ここで　$EC=\sqrt{2}\times BC=6\sqrt{2}$

$AE=AC=6$

よって　$AE:AC:EC=6:6:6\sqrt{2}=1:1:\sqrt{2}$

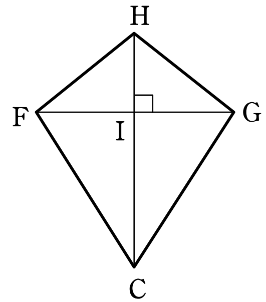
したがって　$\angle CAE=90°$

直角三角形 CAH において

$$CH^2=AC^2+AH^2=6^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2=45$$

$CH>0$ であるから　$CH=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ (cm)

(2)　対角線 CH と FG は垂直である。



また，② から

$FG=\dfrac{2}{3}\times6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

よって，四角形 CGHF の面積は

△HCF＋△HCG

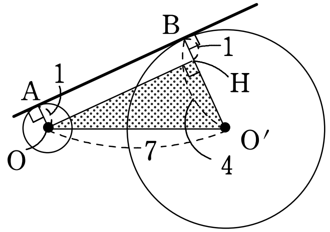
$=\dfrac{1}{2}\times CH\times FI+\dfrac{1}{2}\times CH\times GI$

$=\dfrac{1}{2}\times CH\times(FI+GI)=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times4\sqrt{2}=6\sqrt{10}$ (cm^2)

21

(解説)

O から線分 O′B に垂線 OH を引くと，四角形 AOHB は長方形であるから



$AO=BH$　……①

$AB=OH$　……②

① から　$O'H=BO'-BH=4-1=3$

直角三角形 OO′H において　$3^2+OH^2=7^2$

よって　$OH^2=40$

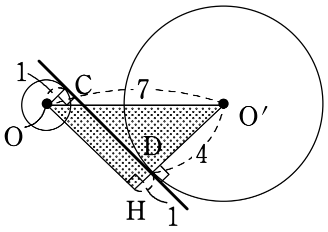
$OH>0$ であるから　　$OH=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

② から　　$AB=OH=2\sqrt{10}$ (cm)

O から線分 O′D の延長に垂線 OH′ を引くと，四角形 OH′DC は長方形であるから

$CO=DH'$　…… ③

$CD=OH'$　…… ④



③ から　　$O'H'=O'D+DH'=4+1=5$

直角三角形 OO′H′ において　　$5^2+OH'^2=7^2$

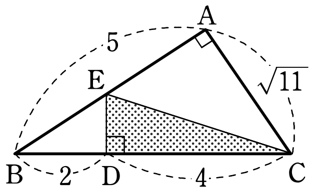
よって　　$OH'^2=24$

$OH'>0$ であるから　　$OH'=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

④ から　　$CD=OH'=2\sqrt{6}$ (cm)

$\boxed{22}$

(解説)



直角三角形 ABC において　　$AC^2+5^2=6^2$

よって　　$AC^2=11$

$AC>0$ であるから　　$AC=\sqrt{11}$

$BD:DC=1:2$ であるから

$$BD=\frac{1}{3}BC=2,\ DC=\frac{2}{3}BC=4$$

△ABC∽△DBE であるから　　$AB:DB=AC:DE$

すなわち　　$5:2=\sqrt{11}:DE$

よって　　$DE=\dfrac{2\sqrt{11}}{5}$

直角三角形 EDC において　　$EC^2=\left(\dfrac{2\sqrt{11}}{5}\right)^2+4^2=\dfrac{444}{25}$

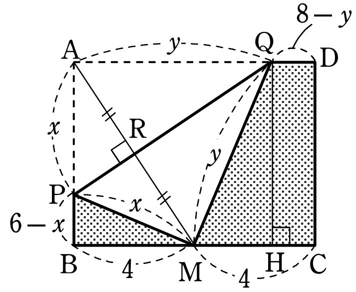
$EC>0$ であるから　　$EC=\sqrt{\dfrac{444}{25}}=\dfrac{2\sqrt{111}}{5}$ (cm)

$\boxed{23}$

(解説)

(1)　$PM=x$ cm とおくと，$AP=x$ であるから

$BP=6-x$



直角三角形 PBM において

$$(6-x)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2=x^2$$

これを解いて　　$x=\dfrac{13}{3}$

したがって　　$PM=\dfrac{13}{3}$ cm

$QM=y$ cm とおくと，$AQ=y$ であるから　　$DQ=8-y$

点 Q から辺 CM に垂線 QH を引くと，四角形 QHCD は長方形であるから

$QD=HC$　…… ①，　$QH=DC$　…… ②

① から　　$MH=MC-HC=\dfrac{8}{2}-(8-y)=y-4$

② から　　$QH=DC=6$

よって，直角三角形 QMH において　　$(y-4)^2+6^2=y^2$

これを解いて　　$y=\dfrac{13}{2}$

したがって　　$QM=\dfrac{13}{2}$ cm

(2)　折り目 PQ は線分 AM の垂直二等分線である。

よって　　$RA=RM$　…… ③

また，直角三角形 ABM において　　$AM=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

③ から　　$RM=AM\div 2=\sqrt{13}$

直角三角形 PMR において

$$PR=\sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2-(\sqrt{13})^2}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\ \text{(cm)}$$

(3)　△APQ≡△MPQ であるから四角形 APMQ の面積は

$\triangle APQ+\triangle MPQ=2\times\triangle MPQ$

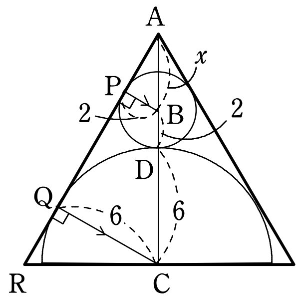
$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{13}{3}\times\frac{13}{2}=\frac{169}{6}\ (\mathrm{cm}^2)$$

$\boxed{24}$

解説

(1)　円錐の頂点を A，球の中心を B，半球の中心を C，球と半球の接点を D とする。

A，B，C，D を通る平面で円錐を切断し，右の図のように，接点を P，Q とする。



線分 BP と線分 CQ は母線 AQ に垂直であるから

$BP /\!/ CQ$

よって　$AB:AC=BP:CQ$

$AB=x$ cm とすると　$x:(x+2+6)=2:6$

よって　$x=4$

したがって，円錐の高さは　$4+2+6=12$ (cm)

(2)　直角三角形 ACQ において

$AQ^2=12^2-6^2=(6\times2)^2-(6\times1)^2=6^2\times3$

$AQ>0$ であるから　$AQ=\sqrt{6^2\times3}=6\sqrt{3}$

円錐の底面の円周上の点で AP の延長上にある点を R とすると

$\triangle ACQ \backsim \triangle ARC$

よって　$AQ:AC=CQ:RC$

すなわち　$6\sqrt{3}:12=6:RC$

これを解くと　$RC=4\sqrt{3}$

したがって，円錐の体積は　$\frac{1}{3}\times\{\pi\times(4\sqrt{3})^2\}\times12=192\pi\ (\mathrm{cm}^3)$