1

解答　(ア)　2　(イ)　1　(ウ)　5　(エ)　4　(オ)　6　(カ)　4　$\sqrt{(キ)}$　$\sqrt{5}$

(ク)　③　(ケ)　6　$\sqrt{(コ)}$　$\sqrt{3}$　$\dfrac{(サ)}{(シ)}$　$\dfrac{2}{9}$

解説

(1)　$\mathrm{OP}=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}={}^{\text{ア}}2$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{(2\cos\theta+\cos7\theta-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta-2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}={}^{\text{イ}}1$

$\mathrm{OQ}^2=(2\cos\theta+\cos7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta)^2$

$=4\cos^2\theta+4\cos7\theta\cos\theta+\cos^2 7\theta+4\sin^2\theta+4\sin7\theta\sin\theta+\sin^2 7\theta$

$=4+1+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$

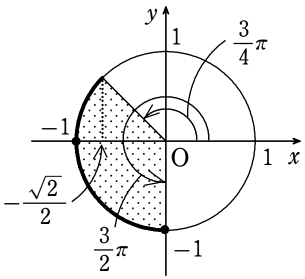
$={}^{\text{ウ}}5+{}^{\text{エ}}4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$

$=5+4\cos(7\theta-\theta)=5+4\cos{}^{\text{オ}}6\theta$

よって　$\mathrm{OQ}^2=5+4\cos6\theta$　……①

$\mathrm{OQ}\geqq0$ であるから，OQ^2 が最大となるとき

OQ も最大となる。



$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$\dfrac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，右の図から　$-1\leqq\cos6\theta\leqq0$

したがって，$6\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{カ}}4}$ のとき OQ^2 は最大値 5 をとるから，OQ の最大値は　$\sqrt{{}^{\text{キ}}5}$

(2)　$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\theta\neq0$ であるから，直線 OP の方程式は　$y=\dfrac{2\sin\theta}{2\cos\theta}x$

すなわち　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$　(${}^{\text{ク}}$③)

3 点 O，P，Q が一直線上にあるとき，直線 OP 上に

点 Q $(2\cos\theta+\cos7\theta,\ 2\sin\theta+\sin7\theta)$がある。

よって　$\sin\theta(2\cos\theta+\cos7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin7\theta)=0$

$\sin\theta\cos7\theta-\cos\theta\sin7\theta=0$

$\sin(7\theta-\theta)=0$

すなわち　$\sin6\theta=0$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$6\theta=\pi$　ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{ケ}}6}$

(3)　(1) から　$\mathrm{OP}=2,\ \mathrm{PQ}=1$

さらに，$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ であるから　$\mathrm{OQ}=\sqrt{{}^{\text{コ}}3}$

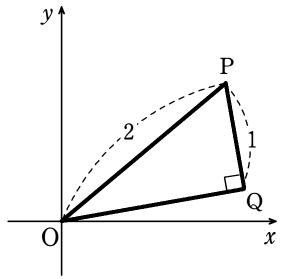
よって，$\mathrm{OQ}^2=3$ であるから，① より

$5+4\cos6\theta=3$

ゆえに　$\cos6\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$6\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}9}\pi$



2

解答　(ア)　2　(イウ)　−3　(エ)　2　$\dfrac{(オカ)}{(キ)}$　$\dfrac{-2}{3}$　(クケ)　−2　(コ)　2

$\sqrt{(サ)}$　$\sqrt{2}$　$\dfrac{(シス)}{(セ)}$　$\dfrac{-5}{4}$

解説

(1)　$x\sqrt{y^3}=a$ の両辺を 2 乗すると　$x^2y^3=a^2$　……①

$\sqrt[3]{x}\,y=b$ の両辺を 3 乗すると　$xy^3=b^3$　……②

$x>0$，$y>0$，$b>0$ であるから，①÷② より　$x=a^{{}^{\text{ア}}2}b^{{}^{\text{イウ}}-3}$

これを ② に代入すると　$(a^2b^{-3})y^3=b^3$

よって　$y^3=a^{-2}b^6$

$y=(a^{-2}b^6)^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}b^{{}^{\text{エ}}2}$

ゆえに　$p=\dfrac{{}^{\text{オカ}}-2}{{}^{\text{キ}}3}$

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}=2a^{\frac{4}{3}}$ のとき

$x=a^2\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^{-3}=2^{-3}a^{{}^{\text{クケ}}-2}$

$$y = a^{-\frac{2}{3}}\left(2a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = 2^2 a^{{}^{\text{コ}}2}$$

よって　　$x+y=2^{-3}a^{-2}+2^2a^2$

$a>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+y=2^{-3}a^{-2}+2^2a^2 \geqq 2\sqrt{2^{-3}a^{-2}\cdot 2^2a^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

等号が成り立つのは $2^{-3}a^{-2}=2^2a^2$ すなわち $a=2^{-\frac{5}{4}}$ のときである。

よって，$x+y$ の最小値は $\sqrt{{}^{\text{サ}}2}$ で，このとき　　$q=\dfrac{{}^{\text{シス}}-5}{{}^{\text{セ}}4}$

3

解答　（ア）a　（イ）2　（ウ）0　（エ）a　（オ）a　（カ）2　$\dfrac{（キ）}{（ク）}$　$\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{（ケコ）}{（サ）}$　$\dfrac{-1}{a}$　$\dfrac{（シ）}{（ス）}$　$\dfrac{1}{2}$　（セ）1　（ソ）8　（タ）3　（チツ）12

（テ）3　（トナ）24　$\sqrt{（ニ）}$　$\sqrt{3}$　（ヌ）1　$\dfrac{（ネノ）}{（ハヒ）}$　$\dfrac{-1}{12}$

解説

(1)　h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2h}(2ah+h^2)={}^{\text{ア}}a+\frac{h}{{}^{\text{イ}}2}$$

したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to {}^{\text{ウ}}0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{h}{2}\right)={}^{\text{エ}}a$$

(2)　放物線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}a^2=f'(a)(x-a)$$

(1) より，$f'(a)=a$ であるから　　$y-\dfrac{1}{2}a^2=a(x-a)$

よって　　$y={}^{\text{オ}}ax-\dfrac{1}{{}^{\text{カ}}2}a^2$

$y=0$ とすると，$0=ax-\dfrac{1}{2}a^2$ より　　$ax=\dfrac{1}{2}a^2$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　　$x=\dfrac{a}{2}$

したがって，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{{}^{\text{キ}}a}{{}^{\text{ク}}2},\ 0\right)$

点 Q を通り ℓ に垂直な直線 m の傾きを k とすると　　$k\cdot a=-1$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　　$k=-\dfrac{1}{a}$

よって，直線 m の方程式は　　$y-0=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$

ゆえに　　$y=\dfrac{{}^{\text{ケコ}}-1}{{}^{\text{サ}}a}x+\dfrac{{}^{\text{シ}}1}{{}^{\text{ス}}2}$

直線 m の y 切片は $\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 m と y 軸との交点 A の座標は　　$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

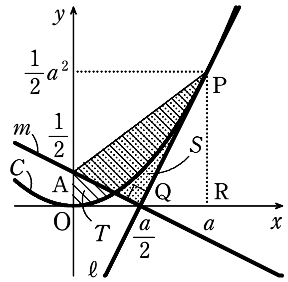
直線 ℓ と m は直交するから　　$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AQ}$

また　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-a\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{2}a^2\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^2+a^4}{4}}=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$$



よって，三角形 APQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{a(a^2+{}^{\text{セ}}1)}{{}^{\text{ソ}}8}$$

点 P から x 軸に垂線 PR を下ろし，台形 OAPR の面積を U とすると

$$U=(\mathrm{OA}+\mathrm{PR})\cdot\mathrm{OR}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2\right)\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a(a^2+1)}{4}$$

y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T は

$$T=U-\int_0^a \frac{1}{2}x^2dx=U-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a(a^2+1)}{4}-\frac{a^3}{6}$$

$$=\frac{3a(a^2+1)-2a^3}{12}=\frac{a^3+3a}{12}=\frac{a(a^2+{}^{\text{タ}}3)}{{}_{\text{チツ}}12}$$

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}=\frac{3a(a^2+1)-2a(a^2+3)}{24}$$

$$=\frac{a^3-3a}{24}=\frac{a(a^2-{}^{\text{テ}}3)}{{}_{\text{トナ}}24}$$

$a>0$ の範囲で $S-T>0$ となるための条件は　$a^2-3>0$

これを解くと，$a>0$ であるから　$a>\sqrt{{}^{\text{ニ}}3}$

$g(a)=a(a^2-3)$ とおくと　$g'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

$g'(a)=0$ とすると　$a=\pm1$

$a>0$ における $g(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	極小 -2	↗

よって，$g(a)$ は $a=1$ で最小値 -2 をとる。

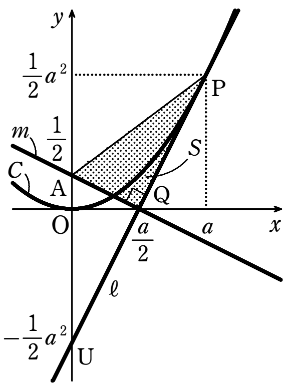
したがって，$S-T$ は

$$a={}^{\text{ヌ}}1 \text{ で最小値 } -\frac{2}{24}=\frac{{}^{\text{ネノ}}-1}{{}_{\text{ハヒ}}12} \text{ をとる。}$$

別解　(三角形 APQ の面積 S)

直線 ℓ と y 軸の交点をUとすると，Uの座標は

$$\left(0,\ -\frac{1}{2}a^2\right)$$



三角形 APQ の面積 S は

$S=$(三角形 APU の面積)$-$(三角形 AQU の面積)

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot a-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\right)(2-1)=\frac{a(a^2+{}^{\text{セ}}1)}{{}_{\text{ソ}}8}$$

4

解答　(ア) 4　(イ) 8　(ウ) 6　(エ) 2　(オ) ③ (または ⓪)　(カ) 8

(キ) 7　$\dfrac{(\text{ク})}{(\text{ケ})}$ $\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{(\text{コ})}{(\text{サ})}$ $\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{(\text{シ})}{(\text{ス})}$ $\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{(\text{セ})}{(\text{ソ})}$ $\dfrac{1}{2}$　(タ) 6

(チ) 6　(ツ) 4　(テ) 4　(ト) 2　(ナ) 2　(ニ) 8　(ヌネ) 13

解説

(1)　$2^1=2$，　$2^2=2\cdot2=4$，　$2^3=4\cdot2=8$，　$2^4=8\cdot2=16$，

$2^5=16\cdot2=32$，　$2^6=32\cdot2=64$，……

よって　$a_1=2$，$a_2={}^{\text{ア}}4$，$a_3={}^{\text{イ}}8$，$a_4={}^{\text{ウ}}6$，$a_5={}^{\text{エ}}2$

また，一の位の数は 2，4，8，6 の 4 つの数字の繰り返しとなるから，すべての自然数 n に対して，$a_{n+4}=a_n$ が成り立つ。(${}^{\text{オ}}$ ③)

注意　問題全体で考えれば ③ が適切な解答である。しかし，(1) を独立の問題と考えたときは，$a_{5n}=a_n$ も当てはまるため，⓪ も正解である。

(2)　① を繰り返し用いると

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}b_{n+3}}{4}=\frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}}{4^2}\cdot\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{4}$$

$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}}{4^3}\cdot\frac{a_nb_n}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{4^4}b_n$$

$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{{}^{\text{カ}}8}}b_n$$

a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3} は数列 $\{a_n\}$ の連続する 4 つの項であるから

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=2\cdot4\cdot8\cdot6=3\cdot2^{{}^{\text{キ}}7}$$

ゆえに　$b_{n+4}=\dfrac{3\cdot2^7}{2^8}b_n=\dfrac{{}^{\text{ク}}3}{{}_{\text{ケ}}2}b_n$

これより，k を自然数とすると

$$b_{4k-3}=\frac{3}{2}b_{4k-7}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^2b_{4(k-1)-7}=\left(\frac{3}{2}\right)^2b_{4(k-2)-3}$$

$$=\cdots\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_1=\left(\frac{{}^{\text{コ}}3}{{}_{\text{サ}}2}\right)^{k-1}$$

① より　$b_{4k-2}=\dfrac{a_{4k-3}b_{4k-3}}{4}$

ここで，$a_{4k-3}=a_1=2$ であるから　$b_{4k-2}=\dfrac{1}{4}\cdot2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

① より　$b_{4k-1}=\dfrac{a_{4k-2}b_{4k-2}}{4}$

ここで，$a_{4k-2}=a_2=4$ であるから　$b_{4k-1}=\dfrac{1}{4}\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{{}^{セ}1}{{}^{ソ}2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

① より　$b_{4k}=\dfrac{a_{4k-1}b_{4k-1}}{4}$

ここで，$a_{4k-1}=a_3=8$ であるから　$b_{4k}=\dfrac{1}{4}\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

(3)　(2) から

$$
\begin{aligned}
S_{4m}&=\sum_{j=1}^{4m}b_j\\
&=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots\cdots+(b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m})\\
&=\sum_{j=1}^{m}(b_{4j-3}+b_{4j-2}+b_{4j-1}+b_{4j})\\
&=\sum_{j=1}^{m}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}\right\}\\
&=3\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}=3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1}{\frac{3}{2}-1}=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1\right\}={}^{タ}6\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-{}^{チ}6
\end{aligned}
$$

(4)　(2) から　$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1}{{}^{ツ}4}\left(\frac{3}{2}\right)^{{}^{テ}4(k-1)}$$

よって，求める積 T_{4m} は

$$
\begin{aligned}
T_{4m}&=(b_1b_2b_3b_4)\cdot(b_5b_6b_7b_8)\cdot(b_9b_{10}b_{11}b_{12})\cdot\cdots\cdots\cdot(b_{4m-3}b_{4m-2}b_{4m-1}b_{4m})\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(1-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(2-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(3-1)}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}\\
&=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot1+4\cdot2+\cdots\cdots+4(m-1)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\dfrac{3}{2}$ の指数部分は

$$4\cdot1+4\cdot2+\cdots\cdots+4(m-1)=\sum_{i=1}^{m-1}4i=4\cdot\frac{1}{2}(m-1)m=2m^2-2m$$

よって　$T_{4m}=\dfrac{1}{4^m}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{{}^{ト}2m^2-{}^{ナ}2m}$

また　$T_{10}=T_8\cdot b_9b_{10}=\dfrac{1}{4^2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\cdot2^2-2\cdot2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3-1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3-1}$

$$=\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^{{}^{ニ}8}}{2^{{}^{ヌネ}13}}$$

5

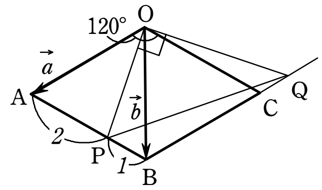
解答　$\dfrac{(ア)}{(イ)}$　$\dfrac{1}{3}$　　(ウ)　2　　(エ)　$-$　　$\dfrac{(オ)}{(カ)}$　$\dfrac{1}{2}$　　(キ)　0　　$\dfrac{(ク)}{(ケ)}$　$\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{\sqrt{(コ)}}{(サ)}$　$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　$\dfrac{\sqrt{(シス)}}{(セ)}$　$\dfrac{\sqrt{21}}{4}$　　$\dfrac{(ソ)\sqrt{(タ)}}{(チツ)}$　$\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$　　$\dfrac{(テ)}{(ト)}$　$\dfrac{7}{9}$

$\dfrac{(ナ)}{(ニ)}$　$\dfrac{1}{3}$　　$\dfrac{(ヌネ)}{(ノハ)}$　$\dfrac{-7}{36}$　　$\dfrac{(ヒ)}{(フ)}$　$\dfrac{7}{9}$　　(ヘホ)　21

解説

(1)　点 P は辺 AB を 2：1 に内分するから



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}3}\vec{a}+\dfrac{{}^{ウ}2}{3}\vec{b}$

ひし形の向かい合う辺は平行で長さが等しいから

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}-\vec{a}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})={}^{エ}-t\vec{a}+\vec{b}$

OA＝AB，∠AOB＝60° であるから，三角形 OAB は正三角形である。

すなわち　　$\mathrm{OB}=|\vec{b}|=1$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}={}^{\text{キ}}0$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot(-t\vec{a}+\vec{b})=-\dfrac{t}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{2}{3}|\vec{b}|^2$

$$=-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}t\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}t+\frac{5}{6}$$

ゆえに　　$-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{5}{6}=0$　　　よって　　$t=\dfrac{{}^{\text{ク}}5}{{}^{\text{ケ}}4}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{コ}}7}}{{}^{\text{サ}}3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\dfrac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\left|-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{25}{16}|\vec{a}|^2-\frac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

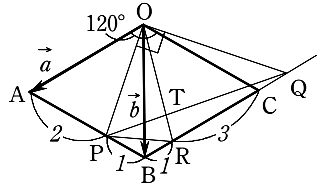
$$=\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}+1=\frac{21}{16}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{シス}}21}}{{}^{\text{セ}}4}$

三角形 OPQ は $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ の直角三角形であるから，その面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{{}^{\text{ソ}}7\sqrt{{}^{\text{タ}}3}}{{}^{\text{チツ}}24}$$

(2)　点 R は辺 BC を 1：3 に内分する点から



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{r}{4}\vec{a}+r\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(4-19s)\vec{a}+\frac{1}{3}(2+s)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，①，② より　　$-\dfrac{r}{4}=\dfrac{1}{12}(4-19s)$，$r=\dfrac{1}{3}(2+s)$

これを解くと　　$r=\dfrac{{}^{\text{テ}}7}{{}^{\text{ト}}9}$，$s=\dfrac{{}^{\text{ナ}}1}{{}^{\text{ニ}}3}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{{}^{\text{ヌネ}}-7}{{}^{\text{ノハ}}36}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{ヒ}}7}{{}^{\text{フ}}9}\vec{b}$

$r=\dfrac{7}{9}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　　　ゆえに　　OT：TR＝7：2

$s=\dfrac{1}{3}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　　　ゆえに　　PT：TQ＝1：2

三角形 PRT，三角形 OPT の面積をそれぞれ S_2，S_3 とする。

PQ：PT＝3：1 より　　$S_1:S_3=3:1$

OT：TR＝7：2 より　　$S_3:S_2=7:2$

よって　　$S_2=\dfrac{2}{7}S_3=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{3}S_1=\dfrac{2}{21}S_1$

ゆえに　　$S_1:S_2={}^{\text{ヘホ}}21:2$

$\boxed{6}$

解答　$\dfrac{(\text{ア})}{(\text{イウ})}$　$\dfrac{1}{35}$　　（エオ）　12　　（カキ）　18　　（ク）　4　　$\dfrac{(\text{ケコ})}{(\text{サ})}$　$\dfrac{12}{7}$

$\dfrac{(\text{シス})}{(\text{セソ})}$　$\dfrac{24}{49}$　(タ)　③　(チ).(ツ)　1.3　(テ).(ト)　0.5

解説

(1)　白球4個，赤球3個が入っている袋から球を3個取り出す方法は　${}_7\mathrm{C}_3=35$ (通り)

確率変数 W のとり得る値は0，1，2，3である。

$$P(W=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{35}=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イウ}35}$$

$$P(W=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{35}=\frac{4\times3}{35}=\frac{{}^{エオ}12}{35}$$

$$P(W=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{35}=\frac{6\times3}{35}=\frac{{}^{カキ}18}{35}$$

$$P(W=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{35}=\frac{{}^{ク}4}{35}$$

W	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

ゆえに，W の期待値 (平均) $E(W)$ は

$$E(W)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}$$

$$=\frac{60}{35}=\frac{{}^{ケコ}12}{{}^{サ}7}$$

また　$E(W^2)=0^2\cdot\dfrac{1}{35}+1^2\cdot\dfrac{12}{35}+2^2\cdot\dfrac{18}{35}+3^2\cdot\dfrac{4}{35}$

$$=\frac{120}{35}=\frac{24}{7}$$

よって，W の分散 $V(W)$ は

$$V(W)=E(W^2)-\{E(W)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{{}^{シス}24}{{}^{セソ}49}$$

(2)　確率変数 Z が標準正規分布に従うから，t を実数の定数とすると

$$P(-t\leqq Z\leqq t)=2P(0\leqq Z\leqq t)$$

が成り立つ。

$P(-t\leqq Z\leqq t)=0.99$ が成り立つとき　$2P(0\leqq Z\leqq t)=0.99$

ゆえに　$P(0\leqq Z\leqq t)=0.495$

正規分布表から0.495に最も近い値で選択肢にある値を探すと　$t=2.58$　(^{タ}③)

(3)　母標準偏差 σ の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度95 % の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　$L_1=\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

また，この標本から得られる母平均 m の信頼度99 % の信頼区間は，(2) より

$$\overline{X}-2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　$L_2=\overline{X}+2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

これらから　$\dfrac{L_2}{L_1}=\dfrac{2\cdot2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{2.58}{1.96}=1.31\cdots\cdots$

よって　$\dfrac{L_2}{L_1}={}^{チ}1.{}^{ツ}3$

また，同じ母集団から抽出した大きさ $4n$ の無作為標本の標本平均を $\overline{Y}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度95 % の信頼区間は

$$\overline{Y}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\leqq m\leqq\overline{Y}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

よって　$L_3=\overline{Y}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}-\left(\overline{Y}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}\right)$

$$=2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ゆえに　$\dfrac{L_3}{L_1}=\dfrac{1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{2}={}^{テ}0.{}^{ト}5$